

分类号 _____

密级 _____

UDC _____

编号 _____

中国科学院研究生院 博士学位论文

太阳磁场外推方法的应用研究

刘 锁

指导教师 _____ 张洪起 研究员 苏江涛 副研究员

_____ 中国科学院国家天文台

申请学位级别 _____ 博士 _____ 学科专业名称 _____ 天体物理

论文提交日期 _____ 2011年5月 _____ 论文答辩日期 _____ 2011年5月

培养单位 _____ 中国科学院国家天文台

学位授予单位 _____ 中国科学院研究生院

答辩委员会主席 邓元勇 研究员

Typeset by L^AT_EX 2 ϵ at May 25, 2011

With package C_ASt_Hesis v0.1g of C_TE_X.ORG

Application Research of Magnetic Field Extrapolation

Suo Liu

Supervisor:

Hong-Qi Zhang and Jiang-Tao Su

National Astronomical Observatories
Chinese Academy of Sciences

May, 2011

*Submitted in total fulfilment of the requirements for the degree of Ph.D.
in Astrophysical Science*

摘 要

太阳物理研究的最关键问题之一就是太阳磁场的研究，几乎所有的太阳活动都和太阳磁场有着密切的联系。磁场的空间结构是太阳磁场的一个非常重要的性质，因此研究磁场的空间结构和性质对理解太阳活动有着重要的意义。目前，对于太阳磁场的精确测量还只限于太阳的光球层次，太阳空间磁场的研究多则是以太阳光球表面磁场为边界条件，基于无力场理论模型假设的磁场外推。本论文主要针对非线性无力场外推方法进行研究、比较，并将无力场外推应用于太阳的真实磁场，研究太阳磁场的空间性质。

本论文的主要内容有：

1、利用解析场对边界积分和近似向上积分两种非线性无力场外推方法的适用性及有效性进行研究和比较；2、利用解析场对近似向上积分，边界积分和优化方法得到的非线性外推场的无力因子 α 进行研究、比较和误差分析。3、利用势场近似，优化、近似向上积分和边界积分外推方法研究一个太阳宁静区空间磁场的扩散性质、磁力线的分布，并对不同的外推磁场进行比较。

本论文取得的主要进展是：

1、对近似向上积分方法进行了改进，主要是针对计算过程中的奇点问题的改进，发现改进以后的近似向上积分方法能够给出更合理结果。2、针对性地从无力因子的角度检验非线性外推场，通过沿着同一条磁力线上 α 的数值计算非线性外推场的偏差。发现同一条磁力线上 α 的偏差比较大，从而对应用无力场外推定量地研究空间磁场做出了一定限制。3、本文对近似向上积分和边界积分外推方法进行了细致与深入地研究、比较。得出在高度低于 15% 的底面尺度下，两种非线性无力场外推能够给出比较可靠结果的结论。4、利用非线性无力场外推研究太阳宁静区空间磁场，发现不同外推场的纵场随高度扩散幅度和趋势基本相同；不同外推场的横场随高度变化幅度一致，但是横场的方向各异；势场与非线性外推场的空间磁力线分布明显不同；进一步发现宁静区光球表面存在明显的非势性。

关键词： 太阳磁场，光球，日冕

Abstract

Magnetic field is the key problem of solar physics, most of the activities of Sun closely relate to solar magnetic field. The property of spatial magnetic field is the most important property, thus, the study of the spatial magnetic field and the structure of spatial magnetic field is very meaningful for understanding the activities of Sun. At present, the reliable measurements of the magnetic field have been restricted to the photosphere, therefore the study of the spatial magnetic field is mainly based on field extrapolation using the photospheric magnetic field as boundary condition, which assuming magnetic field above the photosphere is force-free. In this essay, we mainly study the non-linear force-free extrapolation, and use field extrapolation to study the spatial magnetic field in the Sun.

The main contents are as follows:

1. Based on analytical fields (Low & Lou, 1990), the availability and applicability of two NLFF field extrapolation method (Boundary Integral Equation (BIE) and Approximate Vertical Integration methods) are studied and compared.
2. Two analytical fields have been used to study the the deviation of nonlinear force-free from the values of α along field line.
3. Field extrapolations are used to study the properties of spatial magnetic field of quiet Sun, which include the distributions of magnetic field lines, the expansions of magnetic field with height and the changes of shear angles with height.

The main progress are as follows:

1. Some improvements have been made to the AVI method, it is found that the improved AVI method can give the reliable results.
2. It is found that there are evident deviations of α along field line, which restricts the quantitative study of spatial field using field extrapolation.
3. BIE and AVI methods can give reliable results for heights of about 15% of the extent of the lower boundary.
4. For the quiet Sun, it is found that field strengths with height are consistent among different extrapolated fields; the directions of transverse field are different among different extrapolated fields; the distributions of field lines are not consistent; and

there is evident nonpotentiality on the photosphere of quiet Sun.

Keywords: Solar Magnetic Field, Photosphere, Corona

目 录

摘要	i
Abstract	iii
目录	v
第一章 引言	1
1.1 太阳磁场外推概述	1
1.2 太阳磁场外推方法	3
1.2.1 势场近似	3
1.2.2 线性无力场外推	6
1.2.3 非线性无力场外推	14
1.3 非线性解析场	22
1.4 本文的研究目的与意义	23
第二章 利用解析场比较两种无力场外推方法	25
2.1 引言	25
2.2 外推方法及解析场	26
2.3 结果与讨论	27
2.3.1 解析场与外推场偏差定性比较	27
2.3.2 解析场 AF1 与外推场比较	29
2.3.3 解析场 AF2 与外推场比较	32
2.3.4 讨论	36
2.4 本章结论	39

第三章 非线性无力场的无力因子 α 计算误差的研究	41
3.1 引言	41
3.2 外推方法及解析场	42
3.3 结果与讨论	42
3.3.1 AF1的结果	42
3.3.2 AF2的结果	50
3.3.3 讨论	54
3.4 本章结论	55
第四章 宁静区势场与非线性无力场的比较	59
4.1 引言	59
4.2 数据处理及外推方法	60
4.2.1 数据处理	60
4.2.2 磁场外推方法	61
4.3 结果与讨论	62
4.3.1 无力条件检验	62
4.3.2 外推场性质检验	62
4.3.3 外推场比较	64
4.3.4 讨论	70
4.4 本章结论	73
第五章 总结与展望	75
5.1 总结	75
5.2 展望	75
附录 A	77
A.1 优化方法的理论推导	77
A.2 近似向上积分方法的解	79
参考文献	81

发表文章目录

87

致谢

89

表 格

2.1	$C_{\text{vec}}, C_{\text{cs}}, E'_n, E'_m, \epsilon$ 在 BIE, AVI0 与 AVI1 外推场中的数值 ($64 \times 64 \times 64$)。	28
4.1	四种外推场的 $\sigma_J, \langle f_i \rangle, F_{\text{max}}$ 与 ϵ 数值。	63
4.2	三种非线性无力场在不同高度处 $ B_{\text{NLFF}} - B_P $ 的平均值。	64

插 图

1.1	边界积分方法用的非线性无力场模型。	18
2.1	AF1 与 BIE 外推磁场各分量的比较。行 1, 3, 5 分别为 AF1 的 B_x, B_y, B_z 分量, 行 2, 4, 6 分别为外推磁场的 B_x, B_y, B_z 分量。 z 表示外推的高度, 从 2 到 10, 其中 $\Delta z = 2$ 。	30
2.2	同图 2.1, AF1 与 AVI0 外推场的比较, 外推的误差主要分布在极性反转线的附近。	31
2.3	同图 2.1, AF1 与 AVI1 推场的比较, 明显地减小了外推磁场极性反转处的误差。	32
2.4	在不同计算高度处, AF1 与不同外推方法 (BIE, AVI0 和 AVI1 方法) 得到的磁场的 B_x, B_y, B_z , 方位角 (ϕ) 的相关性。	33
2.5	AF1 以及对应外推磁场的磁力线分布。	34
2.6	同图 2.1, AF2 与 BIE 外推磁场各分量的比较。	35
2.7	同图 2.6, AF2 与 AVI0 外推磁场各分量的比较。	36
2.8	同图 2.6, AF2 与 AVI1 外推磁场各分量的比较。	37
2.9	在不同计算高度处, AF2 与不同外推方法 (BIE, AVI0 和 AVI1 方法) 得到的磁场的 B_x, B_y, B_z , 方位角 (ϕ) 的相关性。	38
2.10	AF2 以及对应外推磁场的磁力线分布。	39
3.1	四种非线性无力场磁力线分布 (AF1 为解析场, AVI 为向上积分外推场, BIE 为边界积分外推场, Opt. 为优化外推场)。	43
3.2	解析场 AF1 中 $z = 0$ 处, α_1, α_2 和 α_3 , 磁场分量 (B_x, B_y, B_z) 和电流分量 (J_x, J_y, J_z) 图, 其中相应的等高线已经对应的标记出。	44
3.3	解析场 AF1 中 $z = 0, z = 1, z = 2$ 处, α_1, α_2 和 α_3 , 优化组合的 $\alpha_{Com.}$ 以及相应的 α 数值解 $\alpha_{Num.}$ 。	45
3.4	高度 $z = 1, z = 2$ 处, 四种无力场 α 分布图。	45

3.5	由两个解析场 (A 对应 AF1, B 对应 AF2) 数值解 $\alpha_{Num.}$ 求得的磁力线的 RSD (δ_α) 散点图。	47
3.6	四种无力场中磁力线 RSD (δ_α) 直方图。	48
3.7	四种无力场磁力线 RSD (δ_α) 散点图。	49
3.8	四种无力场中磁力线 RSD (δ_α) 与磁力线长度散点图。	50
3.9	四种非线性无力场磁力线分布 (AF2 为第二个解析场, AVI 为向上积分外推场, BIE 为边界积分外推场, Opt. 为优化外推场)。	51
3.10	解析场 AF2 中 $z = 0$ 处, α_1 , α_2 和 α_3 , 磁场分量 (B_x , B_y , B_z) 和电流分量 (J_x , J_y , J_z) 图, 其中相应的等高线已经对应的标记出。	52
3.11	解析场 AF2 中 $z = 0$, $z = 1$, $z = 2$ 处, α_1 , α_2 和 α_3 , 优化组合的 $\alpha_{Com.}$ 以及相应的 α 数值解 $\alpha_{Num.}$ 。	53
3.12	高度 $z = 1$, $z = 2$ 处, 四种无力场 α 分布图。	53
3.13	四种无力场中磁力线 RSD (δ_α) 直方图。	55
3.14	四种无力场中磁力线 RSD (δ_α) 散点图。	56
3.15	四种无力场中磁力线 RSD (δ_α) 与磁力线长度散点图。	57
4.1	左边 (A): 视向 (LOS) 磁场 (00:23 UT - 01:48 UT 2007 年 4 月 16 日)。右边 (B): 对应于左边 (A) 中白线框标记区域的矢量磁场, 其中灰度图是纵向磁场, 箭头代表横场。	61
4.2	四种外推无力场在整个计算体积内的磁力线分布。	64
4.3	四种外推无力场在局部区内的磁力线分布。此局部区域为图 4.2 绿色的线框中标出的区域。	65
4.4	不同高度处 ($z = 109, 545$ 和 2180 km) 四种外推场的矢量磁图, 灰度图表示纵向磁场分量, 箭头的大小和方向分别表示横场的强度和方向。行: 1, 2, 3, 4, 对应于 Opt., BIE, AVI 外推场。列: 1, 2, 3, 表示不同的高度。	66
4.5	外推场磁场分量 B_x , B_y , B_z , 的绝对强度的平均值随着高度的变化, 不同类型的曲线代表不同的外推磁场	67

4.6	不同高度层次 ($z = 0, 545, 1090 \dots 4905$ km) Opt. 外推场剪切角的概率分布函数 (pdf), 在图中标记出了此高度水平截面上剪切角的绝对值的平均值。	68
4.7	同图 4.6, BIE 外推场的结果。	70
4.8	同图 4.6, AVI 外推场的结果。	71
4.9	高度 $z = 0, 109, 545, 1090$ km 处不同非线性外推场的剪切角的分布 (等高线表示) 叠加在相应的纵向磁图 (灰度图) 上, 其中等高线为 $\pm 60^\circ, 80^\circ, 100^\circ$ 红/蓝等高线分别表示正/负值。列: 1, 2, 3 对应 Opt., BIE, AVI 外推场。行: 1, 2, 3, 4 代表高度 $z = 0, 109, 218, 327$ km。同图 4.6, 在图中标记出了此高度水平截面上剪切角的绝对值的平均值。	72

第一章 引言

太阳活动直接影响着空间天气，进而影响地球上的一切生命活动。太阳磁场主宰着几乎所有的太阳活动，例如，黑子的形成及演化、暗条爆发、太阳耀斑以及日冕物质抛射等都和太阳磁场有着密切的联系，因此太阳磁场的研究对人类的生存和发展有着非常重要的现实意义。然而目前，对于太阳磁场的精确观测还只限于太阳的光球层次，太阳色球、日冕层次的磁场观测在诸多方面存在着困难，进而限制着对相应层次太阳磁场更深的了解。在此情况下，太阳磁场的空间性质、空间的扩散情况和磁力线分布在观测上还不能展开全面地研究，而对于太阳空间磁场的研究主要是基于理论模型假设的磁场外推。目前比较常用的是无力场假设模型下的磁场外推，其中可以分为势场近似、线性无力场外推和非线性无力场外推。为了解太阳磁场的性质，尤其是空间磁场的信息进而理解太阳活动的本质，对于磁场外推的研究和应用就显得尤为重要。本论文主要围绕着太阳磁场外推方面展开研究，包括对外推方法的理论研究和比较、适用性分析、实际应用研究以及外推场的误差分析等。

1.1 太阳磁场外推概述

磁场的空间结构和性质是太阳磁场研究的一个重要方面，是充分理解太阳磁场的一个必要条件。然而，由于观测的限制目前还无法得到整个空间磁场的信息。尤其是日冕磁场难以直接测量，因为日冕谱线太宽并太暗，而且磁场又太弱，采用测量塞曼谱线的分裂方法非常困难。因此迄今为止日冕磁场的研究还是主要来自观测的日冕结构与光球外推的磁力线位形的比较。实际上除了日珥可以直接测量塞曼分裂外，在很大程度上色球和过渡区的情况也是如此。这种研究方法实质是把观测到的日冕和色球（甚至光球）的结构作为理论外推的检验标准。因为在日冕和色球中，等离子体分布基本上由磁场控制。如果理论外推的磁力线位形与观测到的日冕和色球结构相符合，就可以认为理论外推的磁场就是所研究区域太阳大气中的真实磁场。

太阳上的大部分活动现象（如，太阳耀斑过程、太阳黑子的形成与演化、太阳活动周规律、太阳高层大气加热）本质上是太阳等离子体与磁场的相互作用

的结果，必须用等离子体物理学来讨论。可以用流体近似模型来研究等离子体在磁场中的运动规律，反应这一规律的科学就是磁流体力学（MHD）。磁流体力学是建立在牛顿力学、麦克斯韦方程组和洛伦兹理论的基础上的，它为理解太阳磁场提供了强有力的工具，刻画太阳磁场的微分方程来自于磁流体力学的某种合理的简化。

磁场与等离子体的平衡结构由以下磁流体静力学方程描述：

$$-\nabla p + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \rho \mathbf{g} = 0, \quad (1.1)$$

其中 p 为流体压力， \mathbf{B} 为磁场， ρ 为密度， \mathbf{g} 为重力加速度， $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{Hm}^{-1}$ 为真空磁导率。在色球和日冕中，磁压力远大于气体压力和重力（即 β 比较小， $\beta=2\mu_0 p/B^2$ ）式 (1.1) 可近似为无力场形式：

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = 0, \quad (1.2)$$

即电流与磁场平行，洛伦兹力为零。式 (1.2) 也可以写成

$$\nabla \times \mathbf{B} = \alpha(r)\mathbf{B}, \quad (1.3)$$

其中 $\alpha(r)$ 为空间位置 r 的函数，称为无力因子。同时无力磁场还应满足磁场的无散条件，即

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1.4)$$

方程 (1.3) 和 (1.4) 就是无力场应满足的两个方程。对方程 (1.3) 两边取散度可以证明：在同一条磁力线上 $\alpha(r)$ 为常数。根据无力因子 $\alpha(r)$ 的不同取值情况，无力场一般可以分三种情形考虑：当所有磁力线上的 $\alpha(r)$ 均为同一常数时，磁场为常 α 无力场或线性无力场。当 $\alpha=0$ 时，有 $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ ，就是无电流场，亦即势场。当 $\alpha=f(\mathbf{r})$ ，是空间位置的函数时，磁场称为非线性无力场。无力场外推就是以光球的磁场为边界条件，得到满足方程 (1.3) 和 (1.4) 的空间磁场分布，相应的磁场外推方法分为：势场近似、线性无力场外推和非线性无力场外推。

势场是太阳大气磁场的最简单近似，有关势场外推的理论研究早在 60 年代就已经成熟，其求解的主要方法有：Schmidt (1964) 磁荷模拟方法和 Newkirk (1968) 球谐函数方法。由于势场是无旋场 ($\nabla \times \mathbf{B} = 0$) 可以表示为某一标量函数的梯度 ($\mathbf{B} = -\nabla \phi$)，随之求解势场方法的核心就成为求解满足一定边界条件的拉普拉斯方程 ($\nabla^2 \phi = 0$ ，即 $\Delta \phi = 0$)。自从 Chandrasekhar &

Kendal (1957) 给出一个求解线性无力场的一般解方法后, 关于线性无力场的理论研究得到了较为深入的开展, 到 90 年代中期有关线性无力场的理论基本成熟。其求解方法主要有: 傅里叶级数法 (Nakagawa & Raadu 1972; Seehafer 1978; Alissandrakis 1981; Gary 1989; Aly 1992; Demoulin *et al.* 1997) 和格林函数法 (Chiu & Hilton 1977; Semel 1988; Yan 1995) 两类。解线性无力场的经典方法基本都将之转化为解一个标量 P 的赫姆霍兹方程 ($\nabla^2 P + \alpha^2 P = 0$), 然后得到线性无力场 $\mathbf{B} = \nabla \times [\nabla \times (Pe) + \alpha(Pe)]$ (e 可以是常矢量或位置矢 $e = e(x, y, z)$), 这个方法一直沿用自今, 并且对太阳空间磁场性质和位形的研究起到了非常重要的作用。关于非线性无力场的研究始于 70 年代, 但是到目前为止, 尚无标准的求解方法。所以直到现在对非线性无力场外推的研究仍是热点和难点, 不同的研究者往往采取不同的求解技术。目前比较常用的非线性无力场外推方法有: 直接积分法、Grad & Rubini 方法、 α 分布法、MHD 弛豫法、边界积分法以及优化方法等。观测表面光球表面不是很好满足无力条件, 并且日冕磁场也不完全符合无力场, 因此近期一些研究人员开始利用更多的观测信息 (如, 速度场) 进行非无力场外推方法的研究。

太阳磁场的势场近似不适合用来描述活动区的磁场的拓扑形态; 而线性无力场近似由于做了无力因子是常数的非物理假设, 导致了这类模型不能量度日冕中的自由能, 这样当线性无力场模型应用到太阳表面整个外围空间时形式上出现了能量无限的情况 (Seehafer, 1978), 这是不符合物理规律的。总之, 势场近似与线性无力场近似都存在着本质上的缺陷, 所以目前研究的主要兴趣逐渐转移至非线性无力场。最近提出了很多的模型来求解非线性无力场, 但是非线性无力场的问题特别复杂, 目前其理论研究还很不成熟。所以人们还仍然利用势场或线性无力场来解决一些简单的问题, 并且线性无力场的理论问题也有少量的研究。由于光球层次并不是完全满足无力场假设, 甚至有很多研究人员开始利用非无力场外推来研究太阳的日冕磁场。

1.2 太阳磁场外推方法

1.2.1 势场近似

观测到的太阳光球磁场分布可以看作是光球下面的电流系统产生的。光球上面, 尤其对于活动区上空也可能有电流。因此光球上任意一点的磁场应当是这两种系统电流产生磁场的叠加。如果忽视太阳大气中的电流, 那么剩下的只

有光球下面的电流系统，于是光球上面的磁场就表现为势场。

对于势场近似 $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ ，可以引入标势 ϕ ，则势场近似下磁场表示为

$$\mathbf{B} = -\nabla\phi, \quad (1.5)$$

对上式取散度可得

$$\Delta\phi = 0, \quad (1.6)$$

即势场近似下的标势 ϕ 满足拉普拉斯方程 (1.6)。如果给出适当的边值条件，方程 (1.6) 存在唯一解。在狄利克雷 (Dirichlet) 问题中，边界条件就是边界上的 ϕ ，而在诺伊曼 (Neumann) 问题中，边界条件是边界上势函数 ϕ 的方向导数。后者正好适用于太阳磁场，当研究的区域位于日面中心附近时， $B_n = -\frac{\partial\phi}{\partial n}$ 正是太阳磁场的纵向分量 B_z 。在势场近似下 $\mathbf{B} = -\nabla\phi$ ，可以通过求解如下边值问题而得到：

$$\Delta\phi = 0 \quad (z > 0), \quad -\mathbf{n} \cdot \nabla\phi = \mathbf{B}_n \quad (z = 0), \quad (1.7)$$

其中 \mathbf{n} 为光球表面 ($z = 0$) 的法向单位向量，同时要求 $z \rightarrow \infty$ 时， $\mathbf{B} \rightarrow 0$ 。应用比较多的求解势场的方法有磁荷模拟方法和球谐函数方法。

1.2.1.1 磁荷模拟方法

磁荷模拟方法是 1964 年由 Schmidt 提出。它以平面近似代替球面，只能用于计算日冕较小区域 (如活动区) 上空的磁场分布。但是计算方便，不受空间分辨率限制。此方法原理上与计算静电势的方法类似，它把光球表面的磁场的垂直分量看作磁荷。如果所研究的区域位于日面中心附近，就可以把光球磁场纵向分量 (与视向平行) B_z 作为光球表面磁场的垂直分量。光球面上 ($z = 0$) 的磁荷分布在光球上空 ($z > 0$) 产生磁场分布。当然，它在光球下方 ($z < 0$) 区域中产生虚构的无物理意义的磁场分布。

设光球层的磁荷面密度为 σ ，磁场强度为 \mathbf{B} ， \mathbf{n} 为光球层的单位法向量，则光球上空任意一点 P 的势函数 $\phi(r)$ 可以表示为

$$\phi(r) = \int \frac{\sigma}{\rho} dS = \int \frac{\sigma}{|r - r'|} dS, \quad (1.8)$$

其中 ρ 为 P 点离光球面元的距离， dS 为光球面元的面积， r' 为光球面元的坐标。 σ 与 \mathbf{B} 的关系则由奥高定理确定：

$$2\pi\sigma = B_n = B_z, \quad (1.9)$$

其中 B_z 即观测到的光球纵场，于是式 (1.8) 可写为

$$\phi(r) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{B_z}{|r - r'|} dS, \quad (1.10)$$

最后，磁场由式 (1.5) 确定。而磁力线分布由下式确定：

$$\frac{dx}{B_x(x, y, z)} = \frac{dy}{B_y(x, y, z)} = \frac{dz}{B_z(x, y, z)}. \quad (1.11)$$

Teuber *et al.* 对势场模型进行了发展，1977 年他们提出用快速傅里叶展开法 (FFT) 求解方程。将标势 ϕ 和边值 B_n 都用傅里叶展开，从而可以比较快地计算光球上空的磁场。

势场近似现在几乎成了一种常规的外推方法，可以用于观测，用于建立 MHD 数值模拟的初始条件等。除此，它还可以用来解决光球横磁场的 180° 不确定性；用于计算磁剪切角，以检查磁场的非势程度。

1.2.1.2 球谐函数法

Newkirk *et al.* 于 1968 年提出采用球谐函数来解拉普拉斯方程的解法，后由 Altschluer *et al.* 做了进一步发展，它可应用于必须考虑球面曲率的较大区域，甚至全日面上空的磁场，但必须考虑太阳风的效应。此方法理论上比较完整，但计算量巨大。要达到 $2'' \times 2''$ 的空间分辨率，多项式中必须计算到 $N = 90$ 项之多。对于拉普拉斯方程 (1.5)，当 $r > R$ 时 (R 为太阳半径)，其解为

$$\phi(r, \theta, \phi) = R \sum_{l=1}^N \sum_{m=0}^l f_l(r) P_l^m(\theta) (g_l^m \cos m\phi + h_l^m \sin m\phi), \quad (1.12)$$

其中

$$f_l(r) = \frac{(r_\omega/r)^{l+1} - (r/r_\omega)^l}{(r_\omega/r)^{l+1} - (R/r_\omega)^l} \quad (1.13)$$

边界条件是：当 $r = r_\omega$ 时， $f_l(r) = 0$ ，磁场成径向。这个边界条件的物理意义是当 $r = r_\omega$ 时，太阳风能量占主导，它将迫使冻结的磁力线沿着自由流动的方向。从日全食照片可以看到这种情况大致发生在 $r_\omega = 2.6R$ 处。因此 $r = r_\omega$ 的球面也称为源表面 (source surface)，因为它与 $r \geq r_\omega$ 空间的电流等效。 $r < r_\omega$ 空间中的势场当然必须考虑这个电流的贡献。

函数 $f_l(r)$ 的归一化条件为 $f_l(r) = 1$ 。于是公式 (1.12) 中的系数 g_l^m 和 h_l^m 可以根据观测到的光球磁场 ($r = R$) 用最小二乘法拟合确定。多项式的数目 N 越大，计算得到的磁场越精细。

1.2.1.3 小节

寻求势场解的第三种方法是采用下边介绍的一般无力场解法，然后令其中 $\alpha = 0$ ，即为势场的解。它一般用于计算太阳活动区范围的磁场结构，而且常用于研究日冕大尺度的磁场结构等。

势场计算中需要用到光球磁场的垂向（太阳径向）分量，而磁像仪测量的是视向分量（称为纵场），因此只有当研究区域处在日面中心附近时，才可近似把纵向磁场视为磁场的垂向分量，因此当某研究区域不在日面中心附近而要计算它的磁场时，只能利用该区域几天前或几天后正好在日面中心附近时的磁场测量值作为边界条件，这就存在这段时间中磁场本身是否变化的问题，亦即存在理论计算的磁场与供作比较的观测的日冕结构非同时性问题。而当计算全日面磁场时，由于需要全日面的光球磁场测量值作为边界条件，必须经历一个太阳自转周才能获得。在这样长的时期中，磁场本身很可能变化。因此用一个太阳自转周得到的全日面光球磁场为边界计算出来的磁场位形只能视为是这时期的平均结果。可见势场近似只适用于外推演化缓慢的磁场，而且主要用于了解日冕磁场的宏观结构。

1.2.2 线性无力场外推

实际上，太阳大气中的电流不一定为零，尤其是在活动区上方一般存在电流，因此采用非势无力场更为合理。作为无力场中最简单的一种，线性无力场已获得较深入的研究。线性无力场的经典方法是将之化为解一个标量赫姆霍兹方程求解，其解法主要分为两类：傅里叶级数法（Nakagawa & Raadu 1972; Seehafer 1978; Alissandrakis 1981; Gary 1989; Aly 1992; Demoulin *et al.* 1997; Song&Zhang 2004）和格林函数法（Chiu & Hilton 1977; Semel 1988; Yan 1995）。

在笛卡尔坐标系，可以证明满足 $\nabla \times \mathbf{B} = \alpha \mathbf{B}$ 的常 α 线性无力场 \mathbf{B} 可以用一个标量函数 P 表示为

$$\mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times (P \hat{\mathbf{e}}_z) + \alpha \nabla \times (P \hat{\mathbf{e}}_z), \quad (1.14)$$

或者

$$\mathbf{B} = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} + \alpha \frac{\partial P}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{e}}_x + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \alpha \frac{\partial P}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{e}}_y - \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial P}{\partial y^2} \right) \hat{\mathbf{e}}_z \quad (1.15)$$

其中 P 满足亥姆霍兹标量方程

$$(\nabla^2 + \alpha^2)P = 0 \quad (1.16)$$

一些常用的方法, 如 Nakagawa & Raadu, Chiu & Hilton 等, 所得到的磁场的不同表达式都是由 (1.15) 和 (1.16) 出发推出的。下面介绍几种常见的常 α 线性无力场的计算公式。这些公式也是较多应用于太阳具体活动区磁场的计算。

1.2.2.1 Nakagawa & Raadu 方法

Nakagawa & Raadu 方法由 Nakagawa & Raadu 方法于 1972 年提出。取直角坐标系, 光球对应于 $z = 0$ 平面。所研究的区域 Ω 的范围是: $0 \leq x \leq L_x$, $0 \leq y \leq L_y$, $0 \leq z \leq \infty$ 。用分离变量法解式 (1.16), 并在 x 和 y 两个方向对磁场做二维傅里叶展开, 解 P , 再代回 (1.15) 式可得磁场各个分量的实数形式为

$$\begin{aligned} B_x(x, y, z) = \sum_{k,p=0}^{\infty} \{ & \beta_{k,p} [(SB_{k,p} - TC_{k,p})\cos kX \cos pY + (-SA_{k,p} - TD_{k,p})\cos kX \sin pY \\ & + (SD_{k,p} + TA_{k,p})\sin kX \cos pY + (-SC_{k,p} + TB_{k,p})\sin kX \sin pY] \\ & \exp(-[(\frac{2\pi k}{L_x})^2 + (\frac{2\pi p}{L_y})^2 - \alpha^2]^{1/2}z)\}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} B_y(x, y, z) = \sum_{k,p=0}^{\infty} \{ & \beta_{k,p} [(-UC_{k,p} - VB_{k,p})\cos kX \cos pY + (-UD_{k,p} + VA_{k,p})\cos kX \sin pY \\ & + (UA_{k,p} - VD_{k,p})\sin kX \cos pY + (UB_{k,p} + VC_{k,p})\sin kX \sin pY] \\ & \exp(-[(\frac{2\pi k}{L_x})^2 + (\frac{2\pi p}{L_y})^2 - \alpha^2]^{1/2}z)\}, \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} B_z(x, y, z) = \sum_{k,p=0}^{\infty} \{ & \beta_{k,p} [A_{k,p}\cos kX \cos pY + B_{k,p}\cos kX \sin pY + C_{k,p}\sin kX \cos pY \\ & + D_{k,p}\sin kX \sin pY] \exp(-[(\frac{2\pi k}{L_x})^2 + (\frac{2\pi p}{L_y})^2 - \alpha^2]^{1/2}z)\}, \end{aligned} \quad (1.19)$$

其中

$$X = \frac{2\pi}{L_x}x, \quad Y = \frac{2\pi}{L_y}y, \quad (1.20)$$

$$\begin{aligned}
A_{k,p} &= \frac{4}{L_x L_y} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} B_z(x, y, 0) \cos kX \cos pY dx dy, \\
B_{k,p} &= \frac{4}{L_x L_y} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} B_z(x, y, 0) \cos kX \sin pY dx dy, \\
C_{k,p} &= \frac{4}{L_x L_y} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} B_z(x, y, 0) \sin kX \cos pY dx dy, \\
D_{k,p} &= \frac{4}{L_x L_y} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} B_z(x, y, 0) \sin kX \sin pY dx dy,
\end{aligned} \tag{1.21}$$

$$S = \frac{\alpha \frac{2\pi p}{L_y}}{[\frac{2\pi k}{L_x}]^2 + [\frac{2\pi p}{L_y}]^2}, \quad T = \frac{\frac{2\pi k}{L_x} ([\frac{2\pi k}{L_x}]^2 + [\frac{2\pi p}{L_y}]^2 - \alpha^2)^{1/2}}{[\frac{2\pi k}{L_x}]^2 + [\frac{2\pi p}{L_y}]^2}, \tag{1.22}$$

$$U = \frac{\alpha \frac{2\pi k}{L_x}}{[\frac{2\pi k}{L_x}]^2 + [\frac{2\pi p}{L_y}]^2}, \quad V = \frac{\frac{2\pi p}{L_y} ([\frac{2\pi k}{L_x}]^2 + [\frac{2\pi p}{L_y}]^2 - \alpha^2)^{1/2}}{[\frac{2\pi k}{L_x}]^2 + [\frac{2\pi p}{L_y}]^2}. \tag{1.23}$$

并且, $k + p = 0$ 时, $\beta_{k,p} = 0$; $k, p \neq 0$ 时, $\beta_{k,p} = 1$; 若 $k = 0$, 且 $p \neq 0$ 或者 $p = 0$, 且 $k \neq 0$ 时, $\beta_{k,p} = 0.5$ 。其中 $|\alpha| \leq \min[\frac{2\pi}{L_x}, \frac{2\pi}{L_y}]$, 另外还有个条件是 Ω 区域磁流为零的条件。

1.2.2.2 Chiu & Hilton 方法

1977 年 Chiu & Hilton 提出了一种求解常 α 线性无力场的方法。同样取直角坐标系, 在 $z = 0$ 平面上的矩形区域 ($0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y$) 中, $B_z(x, y, 0)$ 取自观测值。区域外 $B_z(x, y, 0) = 0$, 为水平无边界的边值问题。在柱坐标系中, 亥姆霍兹方程 (1.16) 在半无限空间问题的通解是

$$\begin{aligned}
P(\rho, \phi, z) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\phi} \left\{ \int_{\alpha}^{\infty} [A_m(k) e^{-\sqrt{k^2 - \alpha^2} z} + B_m(k) e^{\sqrt{k^2 - \alpha^2} z}] J_m(k\rho) dk \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{\alpha} [A'_m(k) \cos(\sqrt{\alpha^2 - k^2} z) + C_m(k) \sin(\sqrt{\alpha^2 - k^2} z)] J_m(k\rho) dk \right\},
\end{aligned} \tag{1.24}$$

考虑半无限空间的解, 由衰减条件:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} P(\rho, \phi, z) = 0, \tag{1.25}$$

可以推出式 (1.24) 中随 z 指数增长项的系数

$$B_m(k) = 0. \quad (1.26)$$

而 $A_m(k)$, $A'_m(k)$, $C_m(k)$, 为待定系数, k 为水平波数, $J_m(k\rho)$ 为贝塞尔 (Bessel) 函数。由于边值的不确定, 任意有穷可积函数 $C_m(k)$ 均能使式 (1.24) 满足边值 $B_z(x, y, 0)$, 解不唯一。所以受到现有观测资料的限制 (仅 $z = 0$ 一个层次的纵向磁场观测比较可靠), 只能假定 $C_m(k)$ 为零。

利用贝塞尔函数的正交归一性和加法公式以及恒等式

$$\int_0^\infty \frac{kdk}{\sqrt{k^2 - \alpha^2}} \{ \exp[-(k^2 - \alpha^2)^{1/2}z] \} J_0(kR) = \frac{\exp\{\mp i\alpha(R^2 + z^2)^{1/2}\}}{(R^2 + z^2)^{1/2}}, \quad (1.27)$$

可得到用格林函数表示的磁场表达式:

$$B_i = \frac{1}{2\pi} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} dx' dy' G_i(x, y, z; x', y') B_z(x', y', 0), \quad i = x, y, z, \quad (1.28)$$

其中

$$\begin{aligned} G_x &= \frac{x - x'}{R} \frac{\partial \Gamma}{\partial z} + \alpha \Gamma \frac{y - y'}{R}, \\ G_y &= \frac{y - y'}{R} \frac{\partial \Gamma}{\partial z} - \alpha \Gamma \frac{x - x'}{R}, \\ G_z &= -\frac{\partial \Gamma}{\partial R} - \frac{\Gamma}{R}, \end{aligned} \quad (1.29)$$

辅助函数

$$\Gamma = \frac{z}{Rr} \cos(\alpha r) - \frac{1}{R} \cos(\alpha z), \quad (1.30)$$

$$R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}. \quad (1.31)$$

$r = \sqrt{R^2 + z^2}$ 为所求点 $(x, y, 0)$ 到光球上一点 (x', y', z) 的距离。考虑到当半径 $r \rightarrow \infty$ 时, 半球面上的磁通应为零, 就要求所研究的区域的净磁通为零。

1.2.2.3 Seehafer 方法

该方法于 1989 年由 Seehafer 提出。研究的区域和坐标选取与 Nakagawa & Raadu 求解方法相同, 由式 (1.15) 易求得 B_z 亦满足式 (1.16)。先求出研究区域 (矩形截面的半无限柱体) 中方程 (1.16) 在第一类边界条件下的格林函数,

再令 B_z 在半无限柱体的四个侧面 Σ 上的值为零, 则 B_z 可用相应的格林函数表示成

$$B_z(r) = \iint_{\Sigma} B_z(x', y', 0) \frac{\partial G(x', y', 0; \mathbf{r})}{\partial n} ds', \quad (1.32)$$

解的最后形式是

$$B_z(x, y, z) = \sum_{k,p=0}^{\infty} \left\{ [-T \cos(k \frac{\pi x}{L_x}) \sin(p \frac{\pi y}{L_y}) + S \sin(k \frac{\pi x}{L_x}) \cos(p \frac{\pi y}{L_y})] \right. \\ \left. D_{k,p} \exp[-\sqrt{(\frac{k\pi}{L_x})^2 + (\frac{p\pi}{L_y})^2 - \alpha^2} z] \right\},$$

$$B_y(x, y, z) = - \sum_{k,p=0}^{\infty} \left\{ [U \cos(k \frac{\pi x}{L_x}) \sin(p \frac{\pi y}{L_y}) + V \sin(k \frac{\pi x}{L_x}) \sin(p \frac{\pi y}{L_y})] \right. \\ \left. D_{k,p} \exp[-\sqrt{(\frac{k\pi}{L_x})^2 + (\frac{p\pi}{L_y})^2 - \alpha^2} z] \right\}, \quad (1.33)$$

$$B_z(x, y, z) = \sum_{k,p=0}^{\infty} D_{k,p} \sin(\frac{k\pi}{L_x}) \sin(\frac{p\pi}{L_y}) \exp[-\sqrt{(\frac{k\pi}{L_x})^2 + (\frac{p\pi}{L_y})^2 - \alpha^2} z],$$

其中

$$D_{k,p} = \frac{4}{L_x L_y} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} B_z(x, y, 0) \sin(k \frac{\pi x}{L_x}) \sin(p \frac{\pi y}{L_y}) dx dy,$$

$$S = \frac{\alpha \frac{\pi p}{L_y}}{[\frac{\pi k}{L_x}]^2 + [\frac{\pi p}{L_y}]^2}, \quad T = \frac{\frac{\pi k}{L_x} ([\frac{\pi k}{L_x}]^2 + [\frac{\pi p}{L_y}]^2 - \alpha^2)^{1/2}}{[\frac{\pi k}{L_x}]^2 + [\frac{\pi p}{L_y}]^2}, \quad (1.34)$$

$$U = \frac{\alpha \frac{\pi k}{L_x}}{[\frac{\pi k}{L_x}]^2 + [\frac{\pi p}{L_y}]^2}, \quad V = \frac{\frac{\pi p}{L_y} ([\frac{\pi k}{L_x}]^2 + [\frac{\pi p}{L_y}]^2 - \alpha^2)^{1/2}}{[\frac{\pi k}{L_x}]^2 + [\frac{\pi p}{L_y}]^2},$$

$$|\alpha| \leq \pi \left(\frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2} \right) \quad (1.35)$$

$B_z(x, y, 0)$ 为光球磁场视向分量。

1.2.2.4 Alissandrakis 傅里叶变换

1981 年 Alissandrakis 用傅里叶分析法求解线性无力场方程 (1.3)。将磁场的垂向分量表示为

$$B_z = \sum_{n_x=1}^{N_x} \sum_{n_y=1}^{N_y} \tilde{B}_{n_x, n_y} \exp(-lz) \quad (1.36)$$

其中, $l = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 - \alpha^2}$, $k_x = 2\pi n_x/L$, $k_y = 2\pi n_y/L$, L 是要计算的体积的水平坐标长度, \tilde{B}_{n_x, n_y} 为由观测的光球纵向磁场计算得到的 (n_x, n_y) 阶的傅里叶振幅。同样的方法可以得到磁场水平的两个 B_x 和 B_y 分量

$$B_x = \sum_{n_x=1}^{N_x} \sum_{n_y=1}^{N_y} \tilde{B}_{n_x, n_y} \frac{-i(n_x l - n_y \alpha)}{2\pi(n_x^2 + n_y^2)} \exp(-lz) \quad (1.37)$$

$$B_y = \sum_{n_x=1}^{N_x} \sum_{n_y=1}^{N_y} \tilde{B}_{n_x, n_y} \frac{-i(n_x l + n_y \alpha)}{2\pi(n_x^2 + n_y^2)} \exp(-lz) \quad (1.38)$$

其中 i 是虚数单位。

1.2.2.5 快速傅里叶分析计算线性无力场方法

Song & Zhang 在 2004 年提出快速傅里叶分析计算线性无力场方法。Song & Zhang 认为 Alissandrakis 的傅里叶分析法太抽象地用了无穷两维空间积分, 不便于太阳工作者应用, 另外他只用无力条件 (1.3) 式, 没有充分考虑是否满足无散条件。快速傅里叶分析计算线性无力场方法将其 Alissandrakis 的傅里叶分析法体化, 补证它满足 (1.4) 式。快速傅里叶分析计算线性无力场方法首先设观测磁场 B_z 在 x 方向有 N_1 个取样点, 在 y 方向有 N_2 个取样点, 这里 $N_1 = 2^{m_1}$, $N_2 = 2^{m_2}$, m_1, m_2 均为正整数, 便于作成 FFT 计算程序, 如果观测取样点不是 2 的指数, 则补充些点(在这样点上置 $B_z = 0$ 使计算域大于观测域, 它的好处是使计算值在边界逐渐降为零。先写出观测场的两维有限傅里叶展式:

$$B_z = f(x, y) = \sum_{i=0}^{N_1-1} \sum_{j=0}^{N_2-1} C_{k_1, k_2} e^{I(ix+jy)}, \quad (1.39)$$

这里 $I = \sqrt{-1}$ 为虚数单位, f 是一个复函数, 其实部是观测值 B_z , 虚部位零。 C_{k_1, k_2} 可以通过下面公式 () 求得:

$$C_{k_1, k_2} = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{\lambda, m=0}^{N_1-1, N_2-1} f\left(\frac{\lambda}{N_1}, \frac{m}{N_2}\right) e^{-2\pi I(k_1 \frac{\lambda}{N_1} + k_2 \frac{m}{N_2})}. \quad (1.40)$$

式 (1.40) 可以用快速傅里叶迅速算出 C_{k_1, k_2} 。

类似 (1.39) 式先写出磁场的 3 维空间形式如下:

$$\begin{aligned} B_x(x, y, z) &= \sum_{u, v=0}^{N_1-1, N_2-1} B_x(u, v, z) e^{I(ux+vy)2\pi}, \\ B_y(x, y, z) &= \sum_{u, v=0}^{N_1-1, N_2-1} B_y(u, v, z) e^{I(ux+vy)2\pi}, \\ B_z(x, y, z) &= \sum_{u, v=0}^{N_1-1, N_2-1} B_z(u, v, z) e^{I(ux+vy)2\pi}, \end{aligned} \quad (1.41)$$

假设复数傅氏系数有以下简单的 z 依赖关系:

$$\begin{aligned} B_x(u, v, z) &= B_x(u, v, 0) e^{-kz}, \\ B_y(u, v, z) &= B_y(u, v, 0) e^{-kz}, \\ B_z(u, v, z) &= B_z(u, v, 0) e^{-kz}, \end{aligned} \quad (1.42)$$

复数 k 并非常数, 它依赖于波数 u, v 和 α , 可以证明式 (1.41) 和式 (1.42) 是自洽的, 恰使磁场能满足无力无散条件。对 (1.41) 式求偏导再代入无力方程式 (1.3) 中, 就得以下线性代数方程:

$$\alpha B_x(u, v, 0) - k B_y(u, v, 0) - (I2\pi v) B_z(u, v, 0) = 0, \quad (1.43)$$

$$k B_x(u, v, 0) + \alpha B_y(u, v, 0) + (I2\pi u) B_z(u, v, 0) = 0, \quad (1.44)$$

$$(I2\pi v) B_x(u, v, 0) - (I2\pi u) B_y(u, v, 0) + \alpha B_z(u, v, 0) = 0. \quad (1.45)$$

上述线性方程组有非零解 B_x, B_y, B_z 的条件是系数行列式为零:

$$\begin{vmatrix} \alpha & -k & -2\pi v I \\ k & \alpha & -2\pi u I \\ 2\pi v I & -2\pi u I & \alpha \end{vmatrix} = -\alpha [4\pi^2(u^2 + v^2) - \alpha^2 - k^2] = 0.$$

此行列式确定了磁位形上传播的复波数 k , 将行列式的结果代入式 (1.43) (1.44) 求得 B_x, B_y, B_z 代回 (1.41) 和 (1.42) 式中便得到线性无力场的表达式 (1.46):

$$\begin{aligned}
B_x(x, y, z) &= \sum_{u,v=0}^{N_1-1, N_2-1} \frac{-I(ku - v\alpha)}{2\pi(u^2 + v^2)} e^{-kz} B_z(u, v, 0) e^{I(ux+vy)2\pi}, \\
B_y(x, y, z) &= \sum_{u,v=0}^{N_1-1, N_2-1} \frac{-I(kv + u\alpha)}{2\pi(u^2 + v^2)} e^{-kz} B_z(u, v, 0) e^{I(ux+vy)2\pi}, \\
B_z(x, y, z) &= \sum_{u,v=0}^{N_1-1, N_2-1} e^{-kz} B_z(u, v, 0) e^{I(ux+vy)2\pi},
\end{aligned} \tag{1.46}$$

其中,

$k = \sqrt{-\alpha^2 + 4\pi^2(u^2 + v^2)}$, $0 \leq u \leq \frac{N_1 - 1}{N_1}$, $0 \leq v \leq \frac{N_2 - 1}{N_2}$ 。 $B_z(u, v, 0)$ 可由式 (1.40) 求得。

由于式 (1.46) 的解是从方程组 (1.43-1.45) 得到的, 所以这场满足无力条件。由式 (1.46) 可得:

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \sum_{u,v=0}^{N_1-1, N_2-1} \left\{ \frac{ku^2 - v\alpha u + kv^2 + \alpha uv}{u^2 + v^2} \right\} e^{-kz} e^{I(ux+vy)2\pi} = 0. \tag{1.47}$$

所以式 (1.46) 满足无散条件。式 (1.46) 和 (1.47) 在 $u = 0$, $v = 0$ 时不成立, 对于此情况, 可以在式 (1.43), (1.45) 和 (1.47) 找出一特殊解, 于是最后得到了一个严格的自洽的线性无力场解。

该方法是以 Alissandrakis 的傅里叶分析法为基础出发, 并且尽量弥补 Alissandrakis 的傅里叶分析法的不足之处。具体 Alissandrakis 的傅里叶分析法是否存在理论的缺陷仍然是一个在争论的问题。如引文[33]中的评论: “在满足线性无力场 ($\nabla \times \mathbf{B} = \alpha \mathbf{B}$) 的情况下, 无散条件 ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$) 自然满足, 所以认为快速傅里叶分析计算线性无力场方法的关于散度为零的补正是完全多余的, 所以 Song & Zhang 关于 Alissandrakis 的傅里叶分析法的评论也是不恰当的。”同时引文[31]中认为: 式 (1.46) 中的系数 $B_z(u, u, 0)$ 必须在 $u = 0$, $v = 0$ 时满足 $B_z(0, 0, 0) = 0$, 否则无散条件不成立, 所以从理论上只须规定式 (1.46) 中 $u = 0$, $v = 0$ 所对应的项为零, 不需要寻找特殊解。

1.2.2.6 小节

以上的线性外推方法都是只利用了磁场的纵向分量的一个成分来求解的, 经过太阳物理工作者的长期实践, 看来是可靠, 值得信赖的。由于光球层磁场

观测越来越准确, 也促使人们想去符合 3 个成份, 即以 B_x , B_y , B_z 为底边值求 $z > 0$ 半无限空间中的无力场解。这个提法是超定的 (overdetermined), 因为磁场一定是无散的, 只有两个自由度, 3 个函数 (B_x , B_y , B_z) 仅有两个是独立的。Barnes & Sturrock (1972) 提出只求二独立函数 (clebsch 变量) ξ , η : $\mathbf{B} = (\nabla\xi) \times (\nabla\eta)$ 即能得到无力场, 但在实际求解中碰到了具体困难, 此法目前也是暂还不能。在线性无力场的理论研究过程中也有人试图利用两个成分求解。例如, Hannakam *et al* (1984) 试图符合两个成份, 即以, B_x , B_y 为底边值求解上空场 B , 但是他们的方法在理论上也是存在着比较大的缺陷 (Sakurai, 1989; Semel, 1998; Song & Zhang, 2004; Li *et al*, 2006), 至今利用横场来求解线性无力场也还没有成为现实。

1.2.3 非线性无力场外推

相对于势场近似以及线性无力场, 非线性无力场更接近于太阳上的真实情况。目前比较经典的非线性无力场外推方法有直接积分法、Grad & Rubin 方法、 α 分布法、MHD 弛豫法、边界积分法以及优化方法等。

1.2.3.1 直接积分方法

直接积分方法是最简单并且最直接的非线性无力场外推方法 (Nakagawa 1974; Wu *et al*. 1990; Amari 1997)。它要求以光球表面上的向量磁场值为边界条件。在光球面上的 α 分布为已知, 于是可以用有限差分法来求解无力场微分方程的问题, 计算式为

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} = \alpha B_y + \frac{\partial B_z}{\partial x}, \quad (1.48)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial z} = -\alpha B_x + \frac{\partial B_z}{\partial y}, \quad (1.49)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial x} - \frac{\partial B_y}{\partial y}, \quad (1.50)$$

$$\alpha = \frac{1}{B_z} \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right). \quad (1.51)$$

以边界 $z = 0$ 平面上的已知磁场数据 $B(x, y, 0)$ 为出发点, 由式 1.51 计算出边界面上的 $\alpha(x, y, 0)$, 再用式 (1.48), (1.49), (1.50) 计算 $\frac{\partial B(x, y, 0)}{\partial z}$, 于是可取较小的 $dz > 0$, 利用如下公式计算高度 $z = dz$ 所对应层的磁场 $B(x, y, dz)$:

$$B(x, y, dz) \approx B(x, y, 0) + \frac{\partial B(x, y, 0)}{\partial z} dz. \quad (1.52)$$

又以 $B(x, y, dz)$ 作为新的出发点重复上面的过程, 就可得到更高一层磁场, 最后可以求得空间磁场的分布。这种方法原理简单, 计算也容易。但是它是一种病态问题, 它的积分对误差是不稳定和发散的, 若边值发生较小的变化, 就有可能引起解的较大的变化。此方法在计算时偏离真值的速度比较快, 因此在实际的应用上该方法受到了很大的限制。

1.2.3.2 Grad & Rubin 方法

该方法是由 Grad & Rubin 于 1958 年首次提出的。此方法是应用下面的线性方程的迭代形式求解非线性无力场,

$$\mathbf{B}^n \cdot \alpha^n = 0, \quad (1.53)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}^{n+1} = \alpha^n \mathbf{B}^n \quad (1.54)$$

其中 n 是计算过程的迭代次数。该方法需要的边界条件是纵向磁场分量 B_z 和纵向电流密度 $\mathbf{j}_z = \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \mathbf{B})_z$ 或者 α , μ_0 真空磁导率。这些边界条件可以由光球的矢量磁场求得。Grad & Rubin 方法是以势场作为迭代的初始值, 然后反复迭代双曲方程 (1.53) 和椭圆方程 (1.54)。

1.2.3.3 α 分布方法

α 分布方法是 Sakurai 在 1981 年根据 Grad & Rubin 方法提出的, 用于求太阳活动区磁场。将根据观测的矢量磁场求出 $z = 0$ 光球层的 α 分布

$$\alpha = \frac{1}{B_n} \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \quad (1.55)$$

任意点的磁场 \mathbf{B}_0 可以写成同样边界条件下势场 \mathbf{B}_0 和由电流引起的磁场 \mathbf{B}_c 的叠加 $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_c$, 再根据毕奥-萨伐尔 (Biot-Savart) 定理, 可得 \mathbf{r} 点有电流产生的磁场为

$$\mathbf{B}_c(x) = \int_{z>0} \nabla \times \mathbf{j} dV + \int_{z<0} \nabla \times \mathbf{j}' dV, \quad (1.56)$$

其中, R 和 R' 分别是点 \mathbf{r} 到电流为 \mathbf{j} 和 \mathbf{j}' 的点之间距离。对于 $z > 0$ 的空间电流 \mathbf{j} 满足无力条件, 有 $\mathbf{j} = \frac{\alpha}{\mu_0} \mathbf{B}$, 而对于 $z < 0$ 的空间电流 \mathbf{j}' 由镜像法计算, 即

$$\begin{aligned} j'_x(x, y, -z) &= -j_x(x, y, z), \\ j'_y(x, y, -z) &= -j_y(x, y, z), \\ j'_z(x, y, -z) &= -j_z(x, y, z). \end{aligned} \quad (1.57)$$

此方法具体计算是: 先取 $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0$, 用 (1.56) 和 (1.57) 式求出 \mathbf{B}_c 后, 代入 $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_c$ 得到 \mathbf{B} 。再用 $\mathbf{j} = \frac{\alpha}{\mu_0} \mathbf{B}$ 和 (1.57) 更新 \mathbf{j} 和 \mathbf{j}' , 再代回 (1.56) 再更新 \mathbf{B}_c 和 \mathbf{B} 如此循环, 直到 \mathbf{B}_c 和 \mathbf{B} 不再变化, 此时的 \mathbf{B} 就是最后求得的磁场。

1.2.3.4 MHD 弛豫方法

求日冕磁场的最完整方法是直接利用 (MHD) 方程求解。该方法首先由 Mikic *et al.* 于 1990 年提出。一般而言, MHD 方程能描述依时间演化的日冕等离子体, 但是对于磁场来说, 稳定的处在平衡状态才是理想的状态。这里的平衡态指的就是无力场 (即 $\mathbf{j} \times \mathbf{B} = 0$), 这时等离子体的密度可以略去。无力磁场主要受磁场和等离子体的相互作用来限制, 可以应用下面的运动方程和感应方程来描述:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \approx \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \nu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (1.58)$$

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (1.59)$$

式中 ρ 是等离子体密度, \mathbf{v} 是等离子体速度, p 是气体压力, ν 是粘滞系数, η 是等离子体电阻率。该方法不仅需要光球表面的磁场, 同时需要知道对应光球的速度场作为边界条件。MHD 弛豫法首先假设边界磁场的横场是势场, 然后调节磁场使其横场向观测的横场方向演化, 最后再通过 MHD 过程弛豫磁场使其变为非线性无力场。

该方法已被证明在太阳磁场的计算中很有效, 并且得到了很多有价值的物理结果。但是也有缺点, 如大型的计算要求、收敛性问题、处理非连续性、数值电阻率与粘滞度时空分辨率不够、对于日冕“雷诺数”太小等。

1.2.3.5 优化方法

Roumeliotis 于 1996 年提出了一个用于非线性无力场计算的方法, 该方法是通过紧缩和松弛位相的途径反复调整向量势场值达到底边界处的横向磁场达

到理想的状态。

Wheatland *et al.*于 2000 年又提出一种积分方法, 公式如下:

$$L = \int_V [B^{-2}|(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}|^2 + |\nabla \cdot \mathbf{B}|]dV, \quad (1.60)$$

假设磁场 \mathbf{B} 与时间和位置有关, 即 $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$, 将洛伦兹力和磁场的散度结合在一起, 如果 L 减为零时, 就有 $(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, 这就满足了方程 (1.3) 和 (1.4)。此时空间中的磁场应该就是无力场。对上式进行一系列推导后可得 L 的演化可由下面的方程控制。

$$\frac{dL}{dt} = -2 \int_V \mu F^2 dV. \quad (1.61)$$

对于每个迭代步长 k , 矢量 $\mathbf{F}^{(k)}$ 都可以由已知的 $\mathbf{B}^{(k)}$ 计算出来 (\mathbf{F} 与 \mathbf{B} 的关系以及具体的理论推导见附录 (A.1) 以及Wheatland (2000) 文章)。然后新的磁场就可以由 $\mathbf{B}^{(k+1)} = \mathbf{B}^{(k)} + \mathbf{F}^{(k)}\Delta t$ (Δt 为小量) 计算得到。这种方法在计算中间磁场时需要, 计算体积六个面作为边界条件, 而六个面以平等的权利影响着结果。而实际情况是只有底面边界是已知的, 即观测的光球矢量磁场。

Wiegmann 于 2004 年在积分公式 (1.60) 中引入两个取正值的与位置有关的权函数 $\omega_a(r)$ 和 $\omega_b(r)$ 代入其中, 得到如下积分公式:

$$L = \int_V [\omega_a(r)B^{-2}|(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}|^2 + \omega_b(r)|\nabla \cdot \mathbf{B}|]dV, \quad (1.62)$$

使计算只需底面边界, 更加符合实际的情况。当 $\omega_a(r) = \omega_b(r) = 1$ 时, 其又还原为 Wheatland *et al.* (2000) 的积分公式 (1.60)。

1.2.3.6 边界积分方法

Yan & Sakurai 于 2000 年提出用一种边界积分的方法来求解非线性无力场问题。这种方法解决的是: 无力场方程 (1.3)、无散方程 (1.4) 以及狄利克雷条件 (1.63) 式和渐进条件 (1.64) 式的边值问题。如图 1.1, 在光球 Γ 上空的半无限空间 Ω 存在着无力场。其边界条件是:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \quad \mathbf{B} \in \Gamma, \quad (1.63)$$

\mathbf{B}_0 是光球 Γ 的矢量磁场。由于磁场能量在这个光球上的半空间应该为有限值, 所以这里需要加一个渐进的限制条件为:

$$\mathbf{B} = O(r^{-2}) \quad r \longrightarrow \infty, \quad (1.64)$$

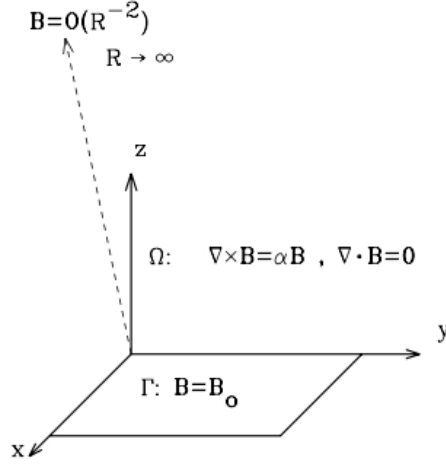


图 1.1: 边界积分方法用的非线性无力场模型。

r 是源点到场点的距离。首先该方法引入参考函数：

$$Y(\lambda, r) = \frac{\cos(\lambda r)}{4\pi r}, \quad (1.65)$$

其中 λ 是一个与位置 i 有关的待求参数。利用第二格林积分公式，结合方程 (1.3) 和 (1.4) 与边界条件 (1.63) 式和 (1.64) 式，可以得到如下关于参数 λ 的积分恒等式：

$$\mathbf{B}(x_i, y_i, z_i) = \Psi(\lambda; x_i, y_i, z_i) + \int_{\Gamma} \left(Y \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial n} - \frac{\partial Y}{\partial n} \mathbf{B} \right) d\Gamma, \quad (1.66)$$

其中

$$\Psi(\lambda; x_i, y_i, z_i) = \int_{\Omega} Y [\lambda^2 \mathbf{B} - \alpha^2 \mathbf{B} - (\Delta \alpha \times \mathbf{B})] d\Omega, \quad (1.67)$$

根据渐进条件 (1.64) 式，应该有当场点 (x_i, y_i, z_i) 趋向无穷远时，

$$\Psi(\lambda; x_i, y_i, z_i) \rightarrow 0. \quad (1.68)$$

如果上式成立，则参数 λ 不能任意，它将是场点位置的函数。于是 Yan & Sakurai 做了如下假定：

$$\Psi(\lambda; x_i, y_i, z_i) = 0. \quad (1.69)$$

当假定 (1.69) 式后，磁场可有如下公式给出：

$$\mathbf{B}(x_i, y_i, z_i) = \int_{\Gamma} \left(Y \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial n} - \frac{\partial Y}{\partial n} \mathbf{B} \right) d\Gamma, \quad (x_i, y_i, z_i) \in \Omega. \quad (1.70)$$

其中 Y 中的 λ 由式 (1.69) 确定。

另外, 若点 $(x_i, y_i, z_i) \in \Gamma$, 可以推导出:

$$\frac{1}{2}\mathbf{B}(x_i, y_i, z_i) = \int_{\Gamma} \left(Y \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial n} - \frac{\partial Y}{\partial n} \mathbf{B} \right) d\Gamma, \quad (x_i, y_i, z_i) \in \Omega. \quad (1.71)$$

有了积分方程 (1.70) 和 (1.71) 以后, 就可以用边界元方法由方程 (1.71) 求出边界上 Γ 上的磁场的法向导数 $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial n}$, 然后再由方程 (1.70) 求出任意一点 (x_i, y_i, z_i) 的磁场 $\mathbf{B}(x_i, y_i, z_i)$ 。

Yan & Li (2006) 和 He & Wang (2008) 对以上的边界积分方法进行了一些改进, 改进的做法是引进的参考函数多了一项如下:

$$Y = \frac{\cos(\lambda\rho)}{4\pi\rho} - \frac{\cos(\lambda\rho')}{4\pi\rho'}, \quad (1.72)$$

其中 $\rho = [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2]^{1/2}$ 是一个可变的点 (x, y, z) 到给定的场点 (x_i, y_i, z_i) 的距离。 $\rho' = [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z + z_i)^2]^{1/2}$, λ 同公式 (1.65) 为依赖于位置 i 的因子。考虑到磁场 \mathbf{B} 与参考函数 Y 满足第二格林积分公式, 经过数学推导以后空间任意一点的磁场强度可以通过如下积分公式得到:

$$\mathbf{B}(x_i, y_i, z_i) = \int_{\Gamma} \frac{z_i [\lambda r \sin(\lambda r) + \cos(\lambda r)] \mathbf{B}_0(x, y, 0)}{2\pi [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + z_i^2]^{3/2}} dx dy, \quad (1.73)$$

$r = [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + z_i^2]^{1/2}$, \mathbf{B}_0 仍然为光球矢量磁场。 $\lambda = \lambda(x_i, y_i, z_i)$ 用如下方程获得:

$$\int_{\Omega''} (Y \nabla^2 \mathbf{B} - \mathbf{B} \nabla^2 Y) d\Omega = \int_{\Omega''} Y (\lambda^2 \mathbf{B} - \alpha^2 \mathbf{B} - \nabla \alpha \times \mathbf{B}) d\Omega = 0, \quad (1.74)$$

Ω 为光球 Γ 上空的半无限空间, Ω'' 是除去了所要计算点的一个小邻域光球 Γ 上空的半无限空间 (参考, Li, Yan & Song, 2004; Yan & Li, 2006)。边界积分的具体操作程序就是通过迭代方法找到最合理 λ , 同时得到磁场值。当磁场满足下列两个条件式 (1.77) 和 (1.78) 时, 就可以认为所求的 λ 达到了要求, 相应的磁场也就是最终磁场。

$$f_i(\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z) = \frac{|\mathbf{J} \times \mathbf{B}|}{|\mathbf{J}| |\mathbf{B}|}, \quad \text{with } \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}, \quad (1.75)$$

$$g_i(\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z) = \frac{|\delta \mathbf{B}_i|}{|\mathbf{B}_i|} = \frac{|\nabla \cdot \mathbf{B}| \Delta V_i}{|\mathbf{B}| \Delta \sigma_i}, \quad (1.76)$$

其中, $\Delta \mathbf{V}_i$ 为体积元, $\Delta \sigma_i$ 为体积元 ($\Delta \mathbf{V}_i$) 的表面积。

$$\begin{aligned} f_i(\lambda_x^*, \lambda_y^*, \lambda_z^*) &= \min(f_i(\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z)), \\ g_i(\lambda_x^*, \lambda_y^*, \lambda_z^*) &= \min(g_i(\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z)). \end{aligned} \quad (1.77)$$

限制条件为:

$$f_i(\lambda_x^*, \lambda_y^*, \lambda_z^*) \leq \epsilon_f, \quad g_i(\lambda_x^*, \lambda_y^*, \lambda_z^*) \leq \epsilon_g, \quad (1.78)$$

ϵ_f 和 ϵ_g 足够小的有效阈值。实际上, $f_i(\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z)$ 代表磁场 \mathbf{B} 与电流 \mathbf{J} 的夹角, 如果 $f_i(\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z) = 0$ 就表示没有洛伦兹力, 方程 (1.3) 得到满足。 $g_i(\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z)$ 代表磁场的散度, 如果 $g_i(\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z) = 0$, 则表明方程 (1.4) 满足。边界积分方法利用一种比较简单的 Downhill 方法来迭代寻找 λ 并计算磁场。

引文[59]中对该方法提出了理论方面的评注是: “ Y 和 $\frac{\partial Y}{\partial n}$ 都是格林函数, 即 δ 函数; $B_{(x,y,0)}$ (即观测到的磁场) 是源函数, 同样 $\frac{\partial B_{(x,y,0)}}{\partial n}$ 也是源函数。由于 Y 和 $\frac{\partial Y}{\partial n}$ 都是亥姆霍兹方程 $(\nabla^2 + \alpha^2)P = 0$ 的解, 所以式 (1.73) 代表的场的各个分量均是赫氏方程的解, 然而 (1.73) 式得到的场显然不满足方程 (1.3) 和 (1.4), 所以它既不是磁场也不是线性无力场, 因为 (1.73) 式各分量彼此无关, 而无力场从方程 (1.3) 和 (1.4) 可知各分量是彼此相关的 (因为磁场一定是无散的, 只有两个自由度, 3个函数 B_x, B_y, B_z 仅有两个是独立的), 不可能通过微分或积分来消掉这个相关性, 只能是联合求解。例如, 当 α 为常数时, 方程 (1.3) 和 (1.4) 自然地导出场三成份都是赫氏方程之解, 这是正定理, 其逆定理一般不成立: 即 3 个任意的满足无散条件的赫氏方程解构成的场一般是有力场并非无力场。式 (1.73) 代表的场, 实为观测值的赫姆霍兹函数向上递推而已, 并非真实的物理场, 而是无力场的一种近似。” 本文暂不考虑边界积分方法理论方面是否存在问题的基础上, 来研究该方法的适用性、可靠性以及满足无力无散条件的程度等。

1.2.3.7 近似向上积分方法

Song *et al.* (2006) 提出了一种近似向上积分的方法, 并尽量避开直接向上积分的病态问题。近似向上积分的方法首先通过下面的公式表示磁场 (其中假定方程在特定的高度 $0 < Z < H$ 内无力场方程解是连续可导的, z 是场点距离

光球表面的高度):

$$\begin{aligned} B_x &= \xi_1(x, y, z)F_1(x, y, z), \\ B_y &= \xi_2(x, y, z)F_2(x, y, z), \\ B_z &= \xi_3(x, y, z)F_3(x, y, z), \end{aligned} \quad (1.79)$$

在公式 (1.79) 中, ξ_1, ξ_2 和 ξ_3 主要依赖于 z , 比较弱地依赖于 (x, y) 。反之, F_1, F_2 和 F_3 主要依赖于 (x, y) , 比较弱地依赖于 z 。公式 (1.79) 在数学上是一种近似的表达, 并且六个偏导数 $\partial F_1/\partial x, \partial F_1/\partial y, \partial F_2/\partial x, \partial F_2/\partial y, \partial F_3/\partial x, \partial F_3/\partial y$ 在 z 方向上缓慢变化。对于太阳的活动区, 由于磁场的大幅度变化不能找到无力方程的解析解, 但是可以组建渐进的解析解在一个非常薄的一层内: Γ 与 $z_k < z < z_{k+1}$ 薄层内, (Γ 活动区的光球表面), $z_k = k\Delta z$ 。其中, $\Delta z = H/K$ (H 距离光球表面的高度, K 所要计算薄层的数目), $k = 1, 2, 3, \dots, K-1, K$ 。

组建式 (1.79) 方程 (1.48) - (1.51) 就可以改写成:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dz} F_1(x_i, y_j, z) &= \xi_3 \frac{\partial F_3(x_i, y_j, z)}{\partial x} + \alpha(x_i, y_j, z) \xi_2 F_2(x_i, y_j, z), \\ \frac{d\xi_2}{dz} F_2(x_i, y_j, z) &= \xi_3 \frac{\partial F_3(x_i, y_j, z)}{\partial y} - \alpha(x_i, y_j, z) \xi_1 F_1(x_i, y_j, z), \\ \frac{d\xi_3}{dz} F_3(x_i, y_j, z) &= -\xi_1 \frac{\partial F_1(x_i, y_j, z)}{\partial x} - \xi_2 \frac{\partial F_2(x_i, y_j, z)}{\partial y}, \\ \alpha(x_i, y_j, z) \xi_3 F_3(x_i, y_j, z) &= \xi_2 \frac{\partial F_2(x_i, y_j, z)}{\partial x} - \xi_1 \frac{\partial F_1(x_i, y_j, z)}{\partial y}, \\ 0 &\leq z \leq \Delta z \end{aligned} \quad (1.80)$$

以上方程 (1.80) 的解可以参考附录 (A.2) 以及文章 (Song *et al.*, 2006)。

近似向上积分的方法, 就是应用方程 (1.80) 从光球表面开始一层一层的积分来外推高空磁场, 同时在外推的时候用到以下方程加以一定的约束。

$$\begin{aligned} &[(B_x)_{i,j}]_{\text{correct}} \\ &= (B_x)_{i,j} (1 - \omega_1) + \omega_1 \frac{1}{4} [(B_x)_{i-1,j} + (B_x)_{i+1,j} + (B_x)_{i,j-1} + (B_x)_{i,j+1}], \\ &[(B_z)_{i,j}]_{\text{correct}} \\ &= (B_z)_{i,j} (1 - \omega_2) + \omega_2 \frac{1}{4} [(B_z)_{i-1,j} + (B_z)_{i+1,j} + (B_z)_{i,j-1} + (B_z)_{i,j+1}], \end{aligned} \quad (1.81)$$

其中, $\omega_1 = 0.1, \omega_2 = 0.2$ 。 $[(B_y)_{i,j}]_{\text{correct}}$ 同以上的 $[(B_x)_{i,j}]_{\text{correct}}$ 。

1.2.3.8 小节

对于非常 α 的一般的非线性无力场, 目前尚无标准的求解方法, 因此不同的人往往采用不同的求解技术, 这些技术一般计算量较大且方法也不太成熟。其实任何一种非线性外推方法在理论上或者技术上都存在着或多或少的缺陷与不足之处, 因此对非线性无力场外推的讨论也便成为了目前磁场外推研究中的一个热点。

1.3 非线性解析场

Low & Lou (1990) 给出了一组满足方程 (1.48) - (1.51) 的解析场, 表达为球坐标系下偏微分方程 (1.82):

$$\mathbf{B} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} \hat{r} - \frac{A}{r} \hat{\theta} + Q \hat{\phi} \right), \quad (1.82)$$

其中, A 和 Q 是两个标量函数. 无力条件要求 Q 可表示为 A 的函数并满足如下限制条件:

$$\alpha = \frac{dQ}{dA} \quad (1.83)$$

和

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1 - \mu^2}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \mu^2} + Q \frac{dQ}{dA} = 0, \quad (1.84)$$

其中, $\mu = \cos \theta$. 数学上, 上面的方程是可以分离变量的微分方程. 其解为:

$$A = \frac{P(\mu)}{r^n}, \quad (1.85)$$

$$Q(A) = aA^{1+1/n}, \quad (1.86)$$

其中, a 和 n 为常数. P 是标量函数, 应该满足如下微分方程:

$$(1 - \mu^2) \frac{d^2 P}{d\mu^2} + n(n+1)P + a^2 \frac{1+n}{n} P^{1+2/n} = 0. \quad (1.87)$$

磁场在无限远处为零, 表明:

$$P = 0 \quad \text{at} \quad \mu = -1, 1. \quad (1.88)$$

从方程 (1.82) 它描述的是轴对称的场, Low & Lou 指出任意一个位置的平面都可以用来代表活动区光球表面的磁场, 因此它可以作为磁场外推的边界条

件。这里的平面需要两个参数来确定，分别是： l （平面与源点的距离）和 ϕ （平面的方向与 z 轴的夹角），这两个参数是为了确定平面，同时也是将球面坐标转换成直角坐标的参数。当 $n > 0$ 时，边界约束方程(1.86)产生一系列分立的本征值，这些本征值可以标记为： $\alpha_{n,m}^2$ ， $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ 。其中 $\alpha_{n,0}^2 = 0$ ，与之对应的本征函数表示为： $P_{n,m}(\mu)$ 。选择不同的 n 与 m 可以给出不同分布的满足无力场方程(1.3)和(1.4)的磁场。再指定 l 与 ϕ 将球坐标系下的磁场转换的直角坐标系下，就可以作为空间磁场来研究磁场外推方法。

1.4 本文的研究目的与意义

了解太阳磁场空间信息是研究太阳磁场的一个重要课题之一，近年来磁场外推理论得到了不同程度的发展；光球磁场数据的空间分辨率也有很大的提高；并且能够得到高分辨率的全球磁场数据；这都给用磁场外推研究太阳空间磁场带来了前所未有的机遇和挑战。同时，各种外推方法也存在着理论上的缺陷不足和技术上的问题和困难，因此各种外推方法的适用性、有效性、误差、适用条件等都是值得研究的课题。

本论文主要是对目前的磁场外推方法进行下全面地了解，并对其中几种方法进行研究、性能检验和比较。目的就是研究下磁场外推方法的有效性和适用性，并将磁场外推方法应用于太阳实际观测的磁场，研究真实太阳磁场的空间性质。

研究意义是能够对磁场外推理论提出新的要求；能够促进磁场外推朝着一个更加符合实际方向发展；能够初步了解不同磁场外推方法的优点和特点；同时能够利用磁场外推方法初步了解下太阳的空间磁场性质，进而形成太阳空间磁场的初步印象，为下一步的继续研究太阳磁场以及磁场与太阳活动的联系等奠定基础。

第二章 利用解析场比较两种无力场外推方法

2.1 引言

太阳磁场主导着大部分太阳活动，例如，暗条爆发、耀斑以及日冕物质抛射等。但是目前，磁场的精确测量还限制在光球层次。由于观测的局限和本身的物理困难，很难了解到色球和日冕中的磁场。取代直接观测色球和日冕的场的方法就是以光球磁场为边界条件的磁场外推。无力假设是磁场外推的基本条件，无力假设就是太阳光球以上电流与磁场平行，没有洛伦兹力。对于太阳日冕中的稀薄的等离子体，其等离子体 β 值很小(β 是气压比磁压)，无力假设是合理的。

基于无力场的基本假设，色球和日冕的磁场可以以光球磁场为边界条件利用磁场外推来得到。对于 $\alpha=0$ 的无电流势场，可以得到其精确解满足方程(1.3)和(1.4)，目前有几种能够有效地求解势场的方法(如，Schmidt, 1964; Newkirk *et al.*, 1968)。对于常 α 线性无力场，也可以得到满足方程(1.3)和(1.4)的解析解，但是这里需要一个人为给定参数(无力因子 α)， α 可以通过比较外推磁场的磁力线分布与其它能够观测到的结构来确定，也可通过理论模型来试探确定(如，Wiegmann, 2005)。求解线性无力场的方法有：Nakagawa & Raadu (1972)方法、Chiu & Hilton (1977)方法、Seehafer (1978)方法、Alissandrakis (1981)方法、Gary (1989)方法、Aly (1992)方法、Yan (1995)方法、Song & Zhang (2005)和 Song & Zhang (2006)方法等。

目前，对于磁场近似以及线性无力场外推已经发展的比较成熟，只需要矢量磁场的视向分量就可以对其求解。但是势场和线性无力场在反映符合实际的太阳空间磁场方面很受限制，实际需要的应该非非线性无力场外推。最近，研究人员提出了一些非线性无力场方法，例如：Sakurai (1981)方法、Chodura & Schlueter (1981)方法、Wu *et al.* (1990)方法、Roumeliotis (1996)方法、Amari *et al.* (1997)方法、Amari *et al.* (1999)方法、Yan & Sakurai (2000)方法、Wheatland *et al.* (2000)方法、Valori *et al.* (2005)方法、Wiegmann (2004)方法以及 Song *et al.* (2006)方法等。尽管在这些方法中存在着差别(Schrijver *et al.*, 2006; DeRosa *et al.*, 2009)，但是它们得到的结果大致上还是可以与观测现象很好的符合(参

考, Régnier *et al.*, 2004; Wiegmann *et al.*, 2006; Régnier *et al.*, 2007)。因此磁场外推提供了一个有前景的工具来帮助我们了解太阳色球及日冕磁场, 进而研究太阳活动的机制。

既然以上的几种非线性无力场外推方法原则上, 都能够应用于太阳色球及日冕磁场的研究 (Song *et al.*, 2006; Song *et al.*, 2007; He, Wang & Yan; 2008; Wang *et al.*, 2008; Guo *et al.*, 2009), 测试它们的有效性及其适用性就显得非常重要。总体来说, 无力场的外推结果可以与观测现象或者解析场比较。Low & Lou (1990) 给出了一组满足方程 (1.3) 和 (1.4) 非线性无力场的解析场, 这些解析场能够容易地提供 3 维磁场, 可以用于检查非线性无力场外推方法的有效性以及适用性。

在这一章中, 我们选择两种非线性无力场外推方法 Yan & Sakurai (2000) 与 Song *et al.* (2006), 利用 Low & Lou (1990) 的解析场来分析与研究这两种外推方法。本章的具体安排是: 首先, 在第二节介绍外推方法及解析场; 第三节, 给出结果和进行讨论; 第四节, 对本章做一个小结。

2.2 外推方法及解析场

本章的工作, 我们研究的非线性外推方法是边界积分和近似向上积分外推方法。边界积分方法具体理论和算法参考第一章 (1.2.3.7) 中边界积分方法的介绍, 这里研究的是后来改进的边界积分方法。近似向上积分方法的基本假设、求解形式以及具体操作同样参考第一章 (1.2.3.6) 近似向上积分方法的介绍。

由于在近似积分的方法中用到了微分计算, 在磁场分量趋近于零的地方求解 α 与 ξ 将会容易产生偏差。由于微分的存在这个问题是无法避免的, 在文章 (Song *et al.*, 2006) 中, 处理上述问题的办法是: 对于 B_z 小于一定的阈值时, 将用一个合理的数值取代。但是这种做法有时也会带来比较大的误差。为了改善这一点缺陷, 我们在处理时, 如果 B_z 小于一定的阈值时, 将用其周围点的平均值代替。这一做法比文章 (Song *et al.*, 2006) 中的处理方式更加合理, 同时对于 B_x 与 B_y 也做了同样的处理。所以, 在本章的结果中标记为 AVI0 是 Song *et al.* (2006) 的处理方法, 标记为 AVI1 是改进后的处理方法, 同时边界积分方法标记为 BIE。

在本章中，两个经典的 Low & Lou 的解析场被选择用来研究 BIE 与 AVI 磁场外推方法，其中参数可以参考第一章 (1.3) 非线性解析场。

第一个解析场标记为 AF1，具体的参数取为： $n = 1, m = 1, l = 0.3, \phi = \frac{\pi}{4}$ ，在直角坐标系下设定： $x \in [-0.5, 0.5], y \in [-0.5, 0.5], z \in [0, 1]$ 。

第二个解析场标记为 AF2，具体的参数取为： $n = 3, m = 1, l = 0.3, \phi = \frac{4\pi}{5}$ ，直角坐标系下： $x \in [-0.5, 0.5], y \in [-0.5, 0.5], z \in [0, 1]$ 。两个解析场的网格为 64 网格 \times 64 网格。

2.3 结果与讨论

2.3.1 解析场与外推场偏差定性比较

参照 Schrijver *et al.* (2006), Amari *et al.* (2006) 和 Valori *et al.* (2007)。在这部分工作中，首先用五个标准的物理参量 (2.1) - (2.5) 来检查外推磁场的整体性能。

C_{vec} 用于定量检验矢量的相关性，定义如下：

$$C_{\text{vec}} = \frac{\sum_i \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{b}_i}{\left(\sum_i |\mathbf{B}_i|^2 \sum_i |\mathbf{b}_i|^2\right)^{1/2}}, \quad (2.1)$$

其中， \mathbf{B}_i 与 \mathbf{b}_i 分别是解析场与外推场在位置 i 处矢量磁场。如果两个场严格一致，则 $C_{\text{vec}} \equiv 1$ ；如果 $\mathbf{B}_i \perp \mathbf{b}_i$ ，则 $C_{\text{vec}} \equiv 0$ 。

C_{cs} 基于柯西-许瓦尔兹 (Cauchy-Schwarz) 不等式，主要用于检验矢量场在方向上的差别，定义如下：

$$C_{\text{cs}} = \frac{1}{M} \sum_i \frac{\mathbf{B}_i \cdot \mathbf{b}_i}{|\mathbf{B}_i| |\mathbf{b}_i|} = \frac{1}{M} \sum_i \cos \theta_i, \quad (2.2)$$

M 空间的格点数目， θ_i 是 \mathbf{B}_i 与 \mathbf{b}_i 的夹角。 $C_{\text{cs}} = 1$ 表示 \mathbf{B}_i 与 \mathbf{b}_i 平行； $C_{\text{cs}} = -1$ 表示 \mathbf{B}_i 与 \mathbf{b}_i 反平行； $C_{\text{cs}} = 0$ 表示 \mathbf{B}_i 与 \mathbf{b}_i 互相垂直。

E_n 为归一化的矢量误差：

$$E_n = \frac{\sum_i |\mathbf{b}_i - \mathbf{B}_i|}{\sum_i |\mathbf{B}_i|}. \quad (2.3)$$

E_m 为平均的归一化的矢量误差：

$$E_m = \frac{1}{M} \sum_i |\mathbf{b}_i - \mathbf{B}_i| / |\mathbf{B}_i|. \quad (2.4)$$

表 2.1: C_{vec} , C_{cs} , E'_n , E'_m , ϵ 在 BIE, AVI0 与 AVI1 外推场中的数值 ($64 \times 64 \times 64$)。

	C_{vec}	C_{cs}	E'_n	E'_m	ϵ
Low & Lou (AF1)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
BIE	0.978	0.956	0.770	0.721	0.990
AVI1	0.983	0.979	0.803	0.722	0.943
AVI0	0.956	0.969	0.661	0.189	0.825
Low & Lou (AF2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
BIE	0.959	0.873	0.658	0.567	0.978
AVI1	0.958	0.864	0.651	0.403	0.728
AVI0	0.939	0.858	0.402	0.214	0.678

当 $E_m = E_n = 0$ 时, 表示两个矢量场一致。在这个工作中定义 $E'_{m(n)} = 1 - E_{m(n)}$ 代替 $E_{m(n)}$ 来进行比较, 以保持易读性。

最后, ϵ 是一个与磁场能量相关的一个物理量 (外推磁场的能量归一化到解析场的能量):

$$\epsilon = \frac{\sum_i |\mathbf{b}_i|^2}{\sum_i |\mathbf{B}_i|^2}. \quad (2.5)$$

对于以上几个物理参量, 如果 \mathbf{B}_i 与 \mathbf{b}_i 是一致的, 则 C_{vec} , C_{cs} , ϵ , E'_n 与 E'_m 都应该为 1。 E'_n 与 E'_m 在表示外推场与解析场的差别时, 包括了数值幅度的差别与矢量方向的差别。而 C_{vec} 与 C_{cs} 主要受外推场与解析场矢量在方向上的差别影响 (Schrijver *et al.*, 2006)。再有就是, C_{vec} 和 C_{cs} 对于外推场的偏差没有 E'_n 敏感。矢量误差 $E'_{n,m}$, 尤其 E'_n , 更加敏感地直接地表示外推矢量场的精度 (Valori *et al.*, 2007)。

表格 2.1 给出了以上五个物理参量的比较结果, AF1 与 AF2 分别代表两个解析场。从表格 2.1 可以看出, 对于两个解析场来说, AVI1 的结果得到了明显的改进, 因为改进后的结果中任意一个参量都比未改进前对应参量更加接近于 1, 尤其是对于 E'_n 和 E'_m 。对于解析场 AF1, E'_n 从 0.661 提高到 0.803; E'_m 分别从 0.189 提高到 0.722。对于解析场 AF2, E'_n 从 0.402 提高到 0.651; E'_m 分别从 0.214 提高到 0.403。 E'_n 和 E'_m 更加显著的改进, 同时说明了, E'_n 和 E'_m 对外推场的精度更加敏感。从表格 2.1 还可以看出, 对于任意一种外推方法, AF1

的结果基本上都好于 AF2 的结果。这种结果也同其它外推方法的结果是一致的 (Schrijver *et al.*, 2006; Amari *et al.*, 2006; Valori *et al.*, 2007), 从表格 2.1 中各个参量幅度看, 这两种外推方法也与其他外推方法相当 (Schrijver *et al.*, 2006; Amari *et al.*, 2006; Valori *et al.*, 2007), 如比较常用的外推方法结果中的参量 C_{vec} 和 C_{cs} 的数值大都在 0.9 的幅度。值得注意的是, 这里结果仅仅用到了底层的数据, 没有用其他侧面与顶面的数据进行外推。而且应当注意的是以上物理参数的比较只是对外推方法在整体性能的一种检验。

2.3.2 解析场 AF1 与外推场比较

图 2.1 给出在不同高度处 AF1 与对应的 BIE 外推场各个分量的直接比较。其中行 1, 3, 5 分别为 AF1 的 B_x , B_y , B_z 分量, 行 2, 4, 6 分别为外推场的 B_x , B_y , B_z 分量。 z 表示外推的高度, 从 2 到 10, 其中 $\Delta z = 2$ 。整体上看, 解析场和外推场的各个分量 B_x , B_y , B_z 能够保持很好的一致性。只是随高度增加外推场的 B_y 分量与解析场的 B_y 分量才显现出差别来。如, 随着高度的增加外推场的 B_y 分量大幅度的负值区域相对比较小 (即, 黑色区域变小), 而即使高度增加解析场与外推场的 B_x 和 B_z 分量的差别也很不明显。在 $z < 6$ 的低层次, 每一个分量在图中都很难看到明显的差别。

图 2.2 和图 2.3 分别为 AF1 与对应的 AVI0 和 AVI1 外推场各个分量的直接比较。由于在 AVI 的方法中用到了微分计算, 从方程 (1.80) 可以直接地看出: 当 B_x , B_y , B_z 分量趋近于零时, α , ξ 特别容易引进计算误差, 导致磁场分量大幅度急剧变化 (可认为是奇点), 而这种情况是不符合实际物理情况的。例如, 在图 2.1 中, 在 B_z 趋于零处 (即中性线处) 可以看到非常明显的偏差。这种计算误差是 AVI 外推方法中主要的误差来源, 并且随着高度的增加会更加明显。例如, AVI0 场中的 B_x 分量在 $z < 4$ 情况下, 能看到两块负值区域被一块正直区域隔开; 而当 B_x 分量在 $z > 6$ 情况下, 这种分布趋势明显地被模糊掉。经过改进后的 AVI1 方法就在很大程度上减小了这种计算的误差, 这一点从图 2.3 中可以明显地看出, 各个磁场分量在中性线处明显的差别消失了。例如, AVI1 场中的 B_x 分量在 $z = 10$ 情况下, 仍能看出正值区域和负值区域, 并且 B_z 分量在图中基本看不出明显的差别。

图 2.4 给出了不同外推高度处, AF1 与对应的外推场分量 B_x , B_y , B_z 以及方位角 (ϕ) 的相关系数。如图所示, 实线, 点线与短划线分别代表 BIE, AVI0

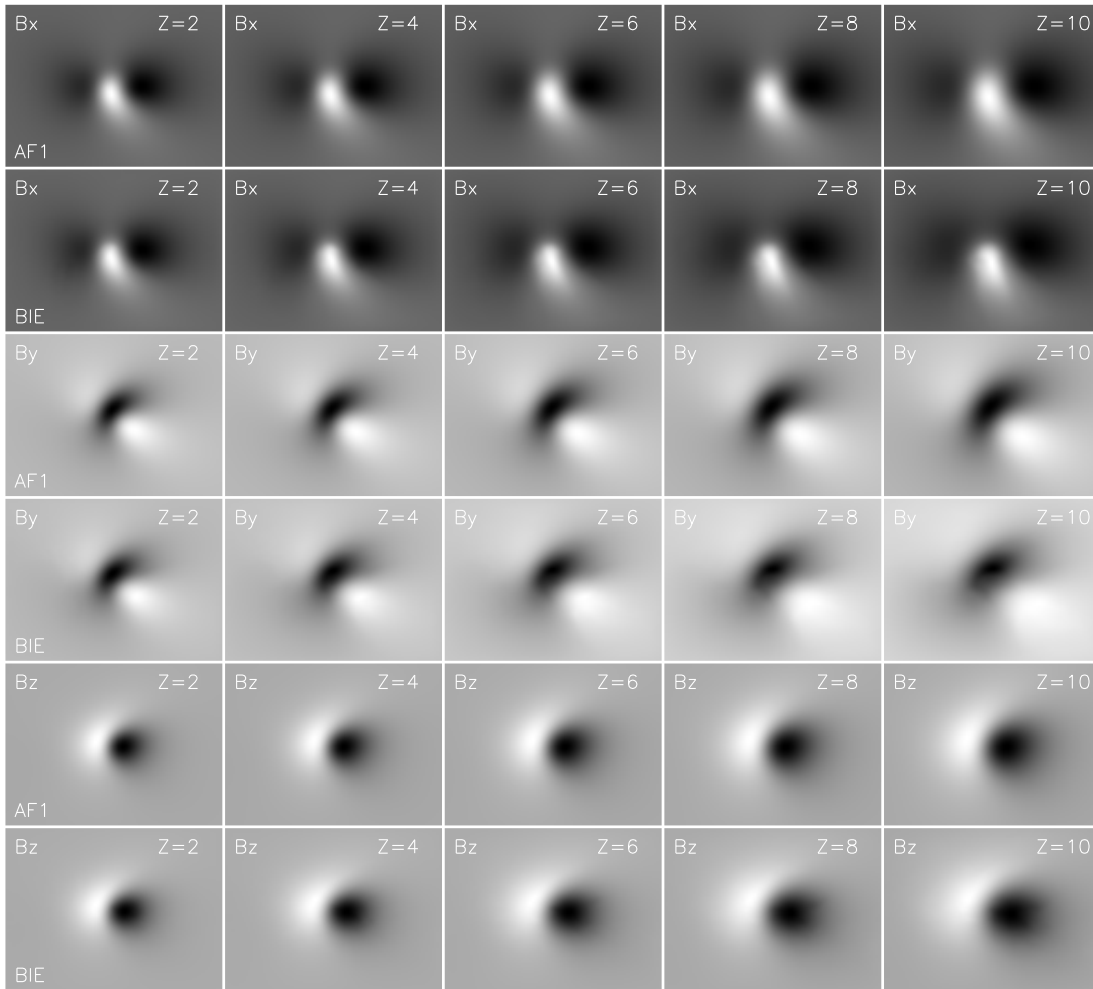


图 2.1: AF1 与 BIE 外推磁场各分量的比较。行 1, 3, 5 分别为 AF1 的 B_x , B_y , B_z 分量, 行 2, 4, 6 分别为外推磁场的 B_x , B_y , B_z 分量。 z 表示外推的高度, 从 2 到 10, 其中 $\Delta z = 2$ 。

和 AVI1 外推场的结果。图中的 x- 与 y- 坐标轴分别为外推高度与相关系数。对于 AF1 与对应的 BIE 外推场, 在 $z < 10$ 情况下, B_x , B_y , ϕ 的相关系数都大于 95%, 并且 B_z 其相关系数大于 98%。这个就意味着在 $z < 10$ 情况下, BIE 外推方法得到的结果在相关性方面是很可靠的。从图 2.4 可以看出, 相对于 AVI0 外推场, AVI1 外推场与 AF1 对应的各个分量的相关系数都有明显的提高。例如, 在 $z = 10$ 处, AF1 与对应的 AVI1 场的 B_x 相关系数提高了 4%。对于 AF1 与 AVI1 外推场, 在 $z < 10$ 情况下, B_y , B_z 的相关系数都大于 95%, 对于 B_x 和 ϕ

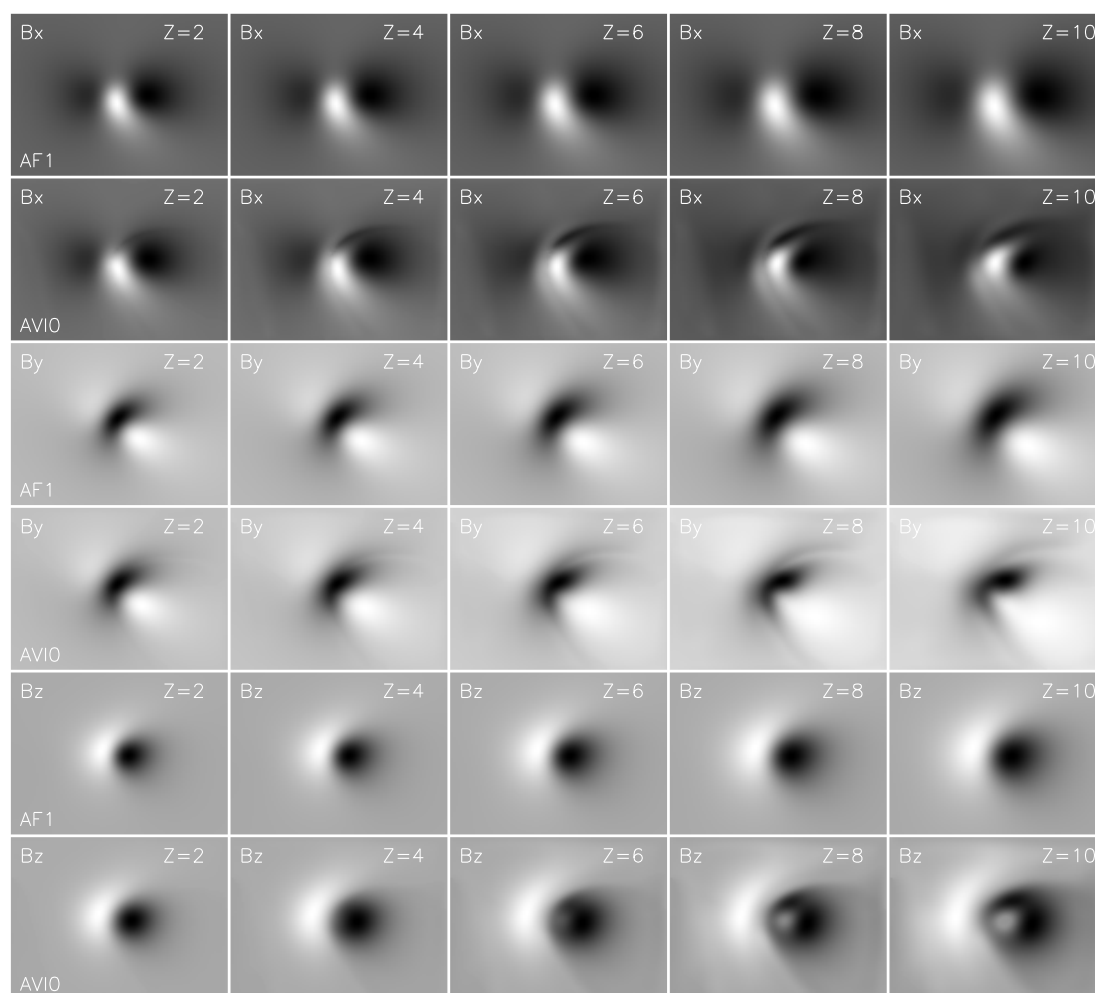


图 2.2: 同图 2.1, AF1 与 AVI0 外推场的比较, 外推的误差主要分布在极性反转线的附近。

其相关系数也超过了 90%, 所以在 $z < 10$ 情况下, AVI1 方法的结果在相关性方面也是比较可靠的。对于 AF1 的结果, 比较各个分量的相关系数可以看出, 其中 AVI0 和 AVI1 场中的 B_x 分量结果是最差的。

图 2.5 表示的是 AF1 与其相应的外推场的磁力线分布情况。各种外推场在图中已经表明, 图中的红线代表的是封闭的磁力线, 而蓝线代表的是开放的磁力线。从图中可以看出, 各种外推出来的磁力线分布和 AF1 的磁力线分布在低层次基本可匹配。随着高度的增加外推出来的磁力线与 AF1 的磁力线开始出现偏差。而且可以看出, 相比于 AVI0 方法外推出的磁力线分布, 经过改进的

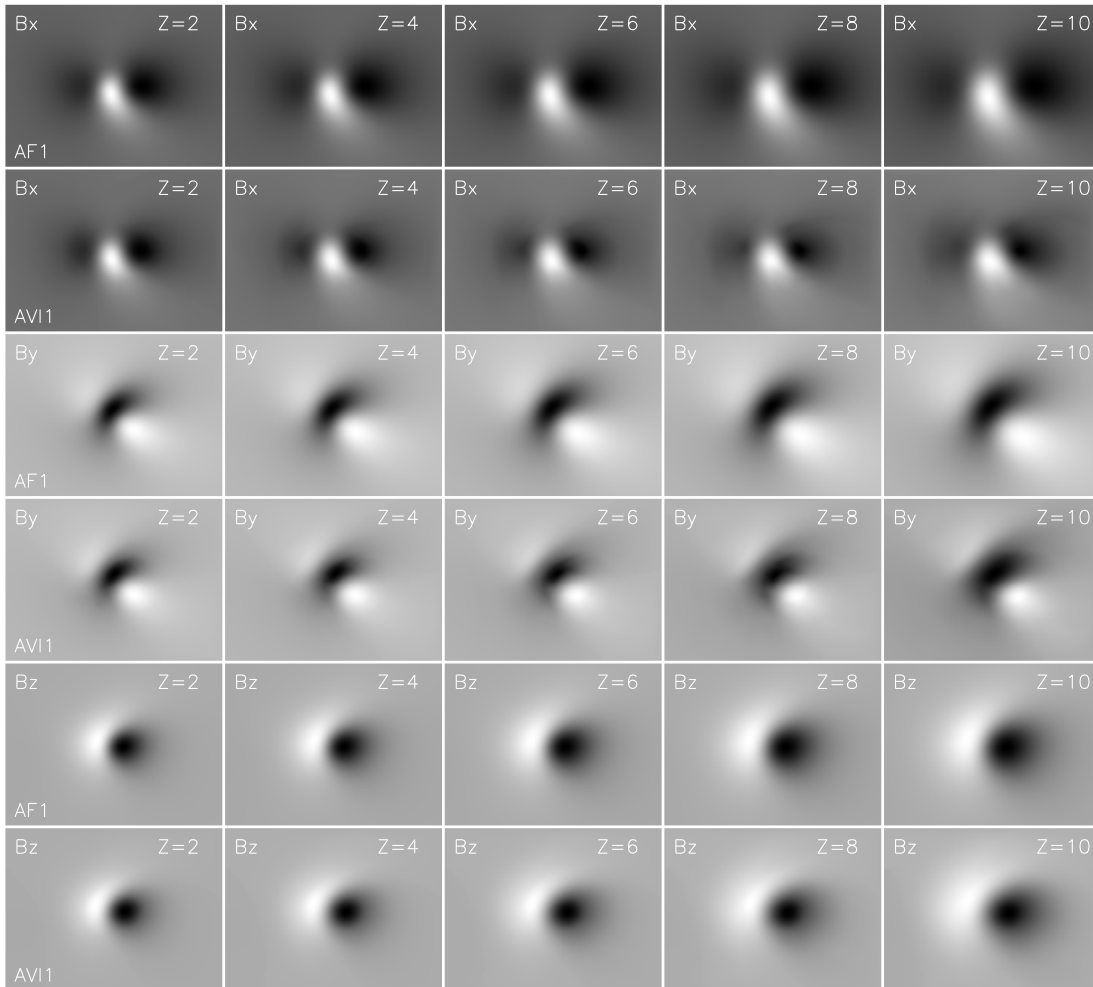


图 2.3: 同图 2.1, AF1 与 AVI1 推场的比较, 明显地减小了外推磁场极性反转处的误差。

AVI1 方法外推出来磁力线分布更能与 AF1 的磁力线分布相匹配。所以从 AF1 解析场来看, AVI1 方法的性能确实有所提高。

2.3.3 解析场 AF2 与外推场比较

图 2.6 给出在不同高度处 AF2 与对应 BIE 外推场各个分量的直接比较。在图 2.6 中, 解析场与外推场的 B_x , B_z 的一致性仍然很好。但是图 2.6 中两个场中 B_y 分量的一致性就不如图 2.1 中两个场中 B_y 分量的一致性。甚至在 $z > 4$ 情况下, 解析场与外推场的 B_y 分量就能够看出明显的差异。例如, 解析场中

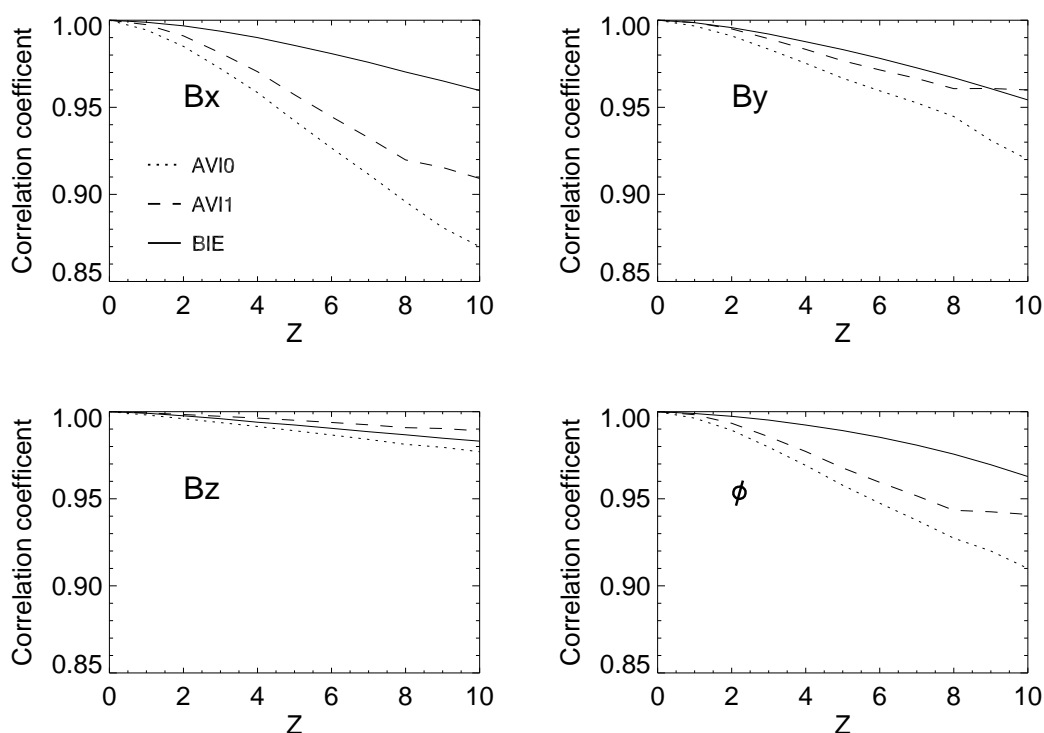


图 2.4: 在不同计算高度处, AF1 与不同外推方法 (BIE, AVI0 和 AVI1 方法) 得到的磁场的 B_x , B_y , B_z , 方位角 (ϕ) 的相关性。

B_y 在不同高度处其正值区域与负值区域都有比较明显的界限, 而在外推场中在 $z > 4$ 的高度处其正值区域与负值区域的界限已经基本消失。

图 2.7 和图 2.8 为不同高度处, AF2 与 AVI0 和 AVI1 对应的外推场分量的比较。比较这两个图可以看出, AF2 与 AVI1 外推场的一致性 (图 2.8) 明显优于 AF2 与 AVI0 外推场的一致性 (图 2.7)。在图 2.7 中, 仅当 $z = 2$ 处, 对应 B_z 分量就有了明显的差别 (相对于解析场, 外推场的磁场数值显得比较发散, 并随高度的增加尤为严重)。在图 2.8 中, AF2 与相应的 AVI1 外推场的 B_x 和 B_z 能够显示出比较好的一致性 (如, 在 $z < 6$ 情况下, 其差别是非常小的)。这里注意的是 AVI1 外推场与 BIE 外推场相一致的是: 相对于 B_x 和 B_z , 两个外推场中的 B_y 分量在与 AF2 的 B_y 分量的一致性方面都是最差的。

图 2.9 是在不同高度处, AF2 与其相应的外推场分量 B_x , B_y , B_z 以及 ϕ 的相关系数。与图 2.4 相比较, 这里各个分量的相关系数都有所下降。在 $z < 10$ 情

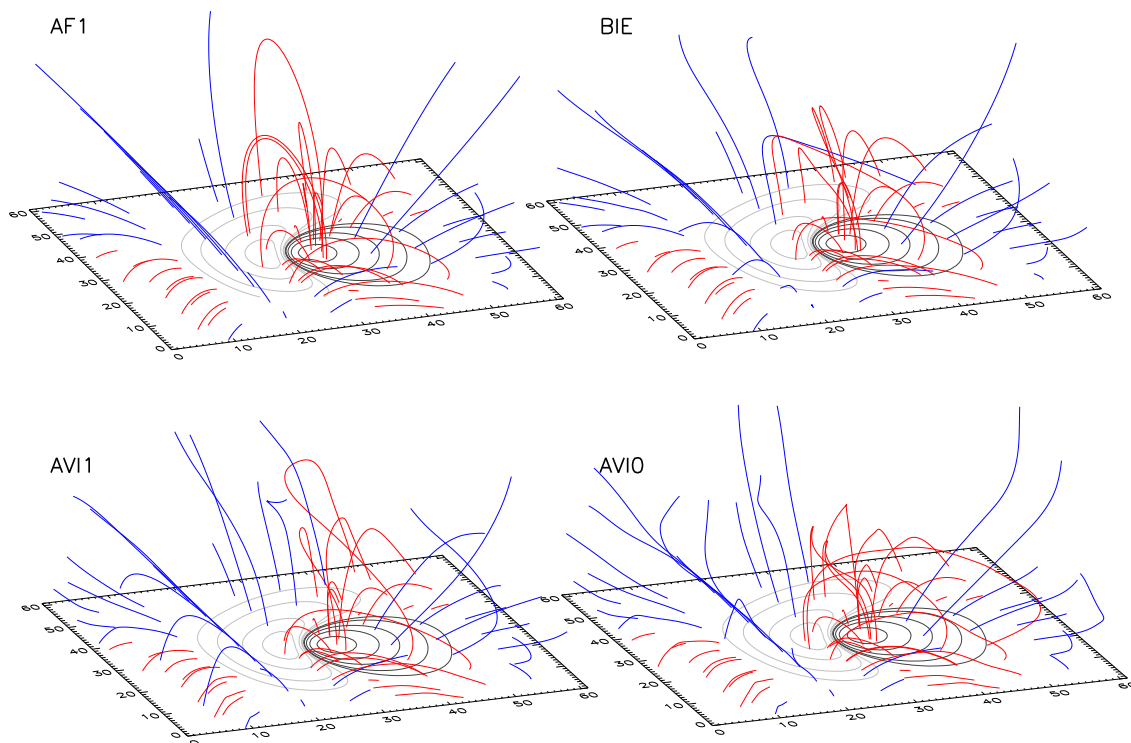


图 2.5: AF1 以及对应外推磁场的磁力线分布。

况下，外推场与解析场的 B_x , B_z , ϕ 分量在整体上来看其相关系数都基本上达到 90%。但是对于 B_y 分量，其相关系数明显低于其它分量，如 AVI0 以及 BIE 外推场与 AF2 的 B_y 分量的相关系数随着高度的增加降到了 80% 以下。这里的原因可能是由于 B_y 分量的分布比其它分量更复杂，导致相关系数降低。外推场与解析场 B_y 分量的相关系数比较差的结果，其实在图 2.6 已经可以直接地看到，在图 2.6 中我们就可以看到外推场与解析场的 B_y 分量之间存在明显的差别。如，BIE 场与 AF2 的 B_y 分量在 $z = 4$ 处其差别就已经很明显；AVI1 场结果略好一些，但是在 $z = 10$ 处差别也是显而易见的；而 AVI0 场结果就更差一些。应该注意的是，外推场与解析场的 ϕ 的相关系数，直接受到 B_y 偏差的影响，因为 ϕ 是由 B_x 和 B_y 直接推导出来的。从相关系数方面考虑，相对于 AVI0 方法，AVI1 方法给出的结果在精度上得到了一定的提高，尤其是 B_y 分量（例

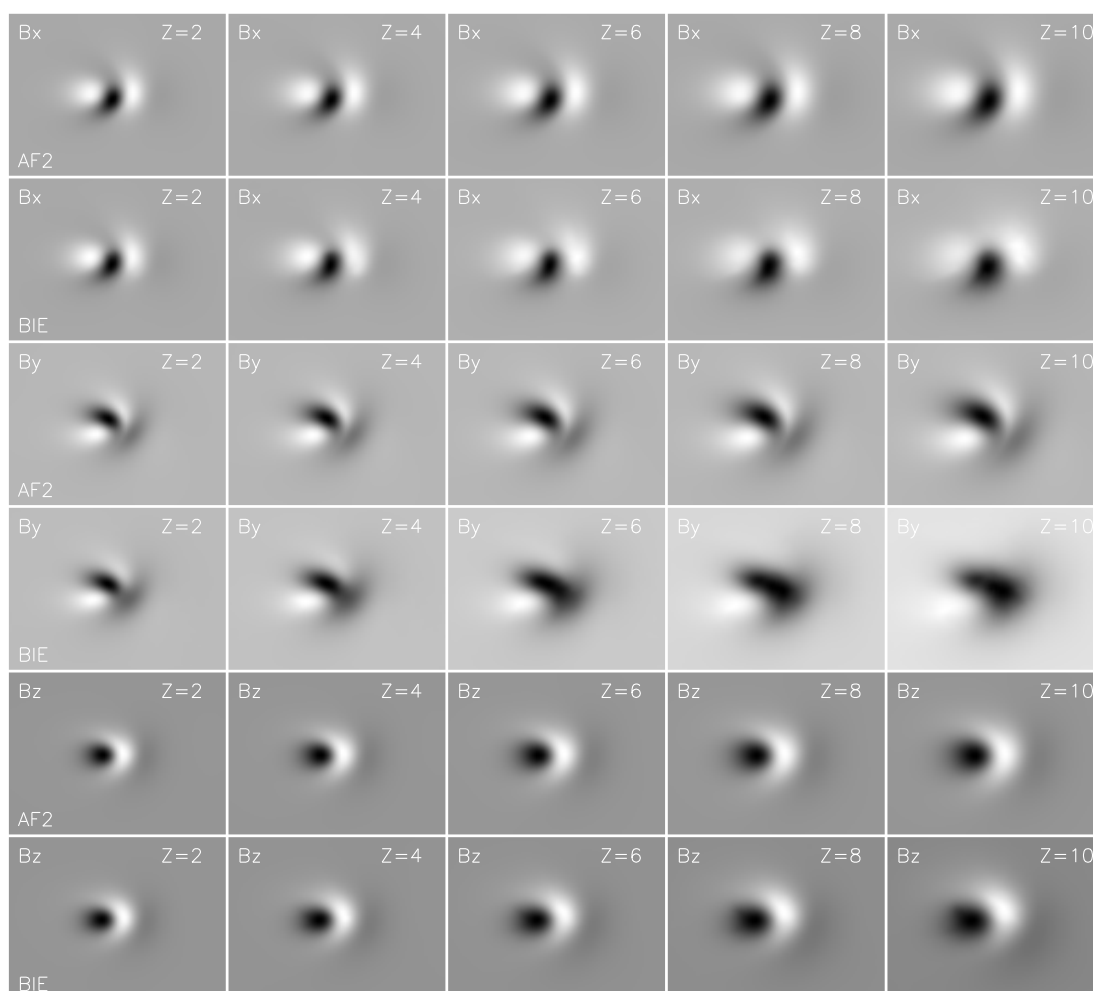


图 2.6: 同图 2.1, AF2 与 BIE 外推磁场各分量的比较。

如, 在 $z = 10$ 处, B_y 分量的相关系数提高了 6%)。对于改进后的 AVI1 方法, 在 $z < 10$ 情况下, B_z 的相关系数超过了 95%。整体上在 $z < 10$ 情况下, FA2 解析场的各个分量与对应外推场的各个分量仍然存在着明显的相关。

图 2.10 是 AF2 及与其对应的各外推场磁力线的分布, 图中可以看到它们的分布之间存在着明显的差别。例如, 对于三种外推场开放的磁力线来说其延伸高度基本都高于 AF2 的磁力线。随着高度的增加, 外推场与 AF2 的封闭磁力线的差别表现得更加明显。另外在图 2.10 中的磁力线分布, 不能明显地看出 AVI1 方法的结果好于 AVI0 方法的结果。

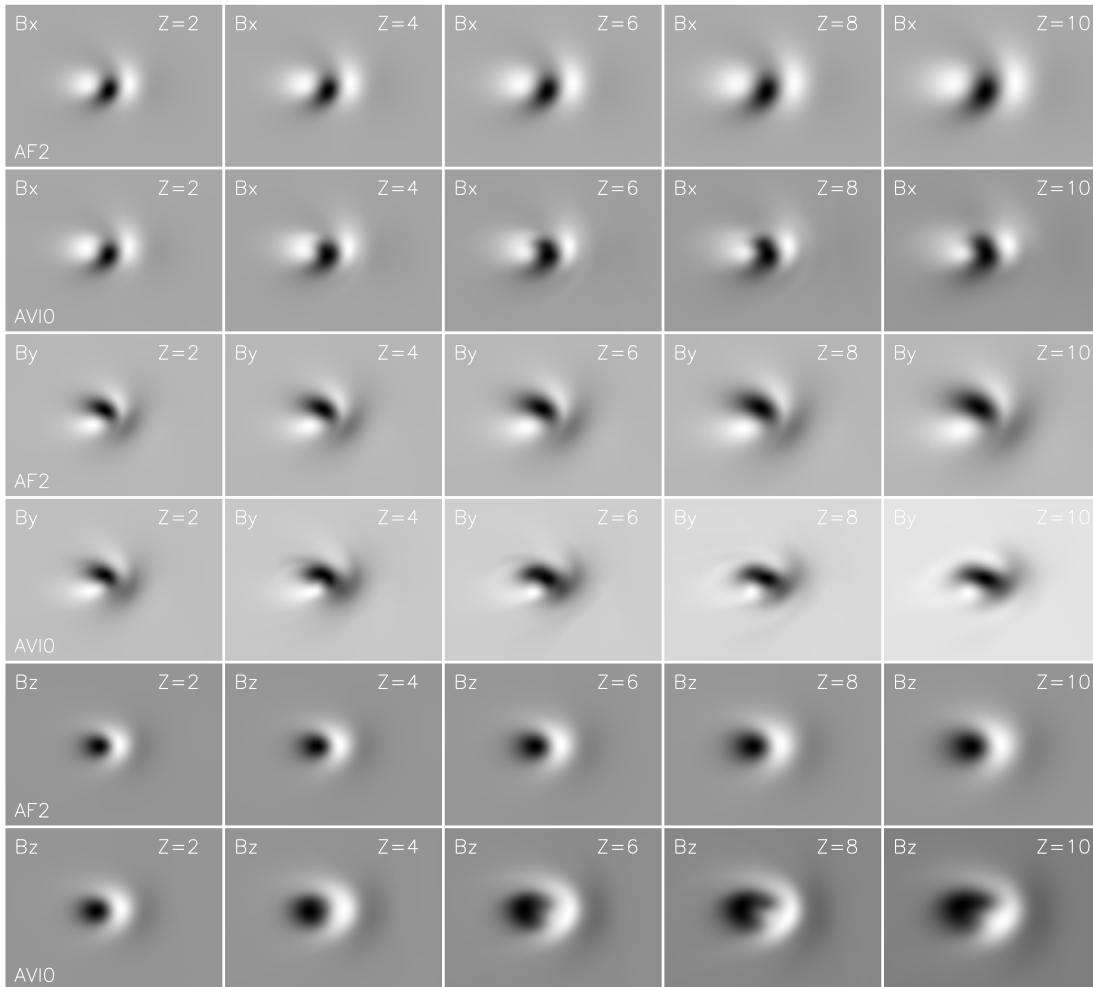


图 2.7: 同图 2.6, AF2 与 AVIO 外推磁场各分量的比较。

2.3.4 讨论

以光球磁场为边界条件的磁场外推是研究太阳日冕磁场的有效途径之一，因此对磁场外推方法的研究也就显得尤为重要。目前，由于不能得到太阳的空间磁场信息，对磁场外推方法性能的研究也都是基于解析场或者与太阳的其他观测现象比较。本部分工作通过利用解析场对两种非线性外推方法的研究可以看出：对于 64×64 的底面边界，在相对高度低于 10 条件下，第一个解析场与相应的外推场的相关性大于 90%；同样的条件下，第二个解析场与相应的外推场的相关性大于 80%。比较及研究得到的结论是在高度低于 15% 的底面尺度下，两种非线性无力场外推能够给出比较可靠的结果。

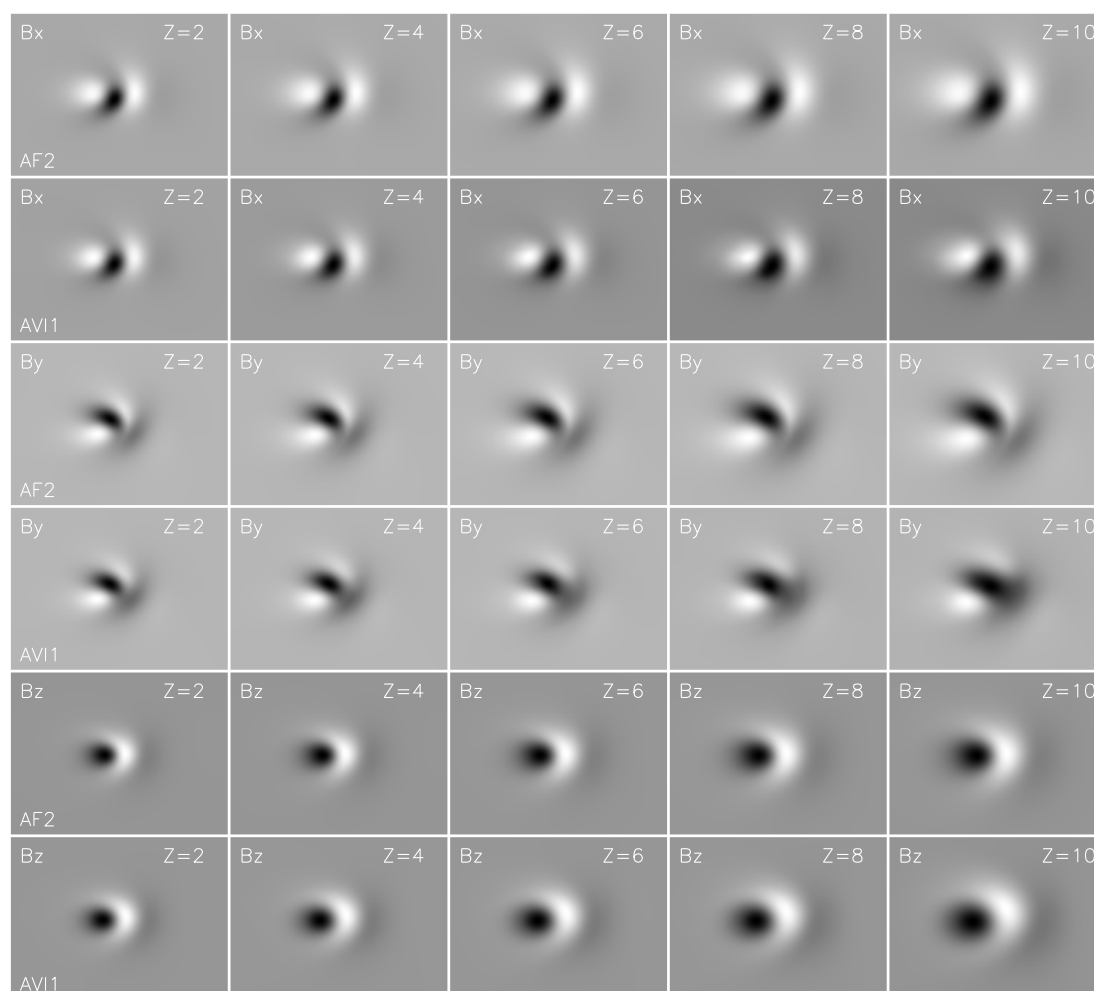


图 2.8: 同图 2.6, AF2 与 AVI1 外推磁场各分量的比较。

从表格 2.1 以及解析场与外推场各分量的相关性分析看出：改进后的 AVI1 方法的性能明显的优于改进前的 AVI0 方法。在磁场分量直接比较和磁场分量的相关性上可以看出：AF1 中的 B_x 分量和 AF2 中的 B_y 分量在两种外推场中都不如相应的其它分量，其原因可能是在弱磁场附近的强电流直接影响了非线性外推场的磁场值。另外需要说明的是：应用 Low & Lou (1990) 的解析场来检验两种非线性无力场外推方法也存在理论上的缺陷。因为用于外推的数据只是解析场有限的一部分，而 Low & Lou (1990) 的解析场表示的应该理解为整体的磁结构。

在该部分工作的研究过程中，我们发现两种外推方法在既有各自的优点的

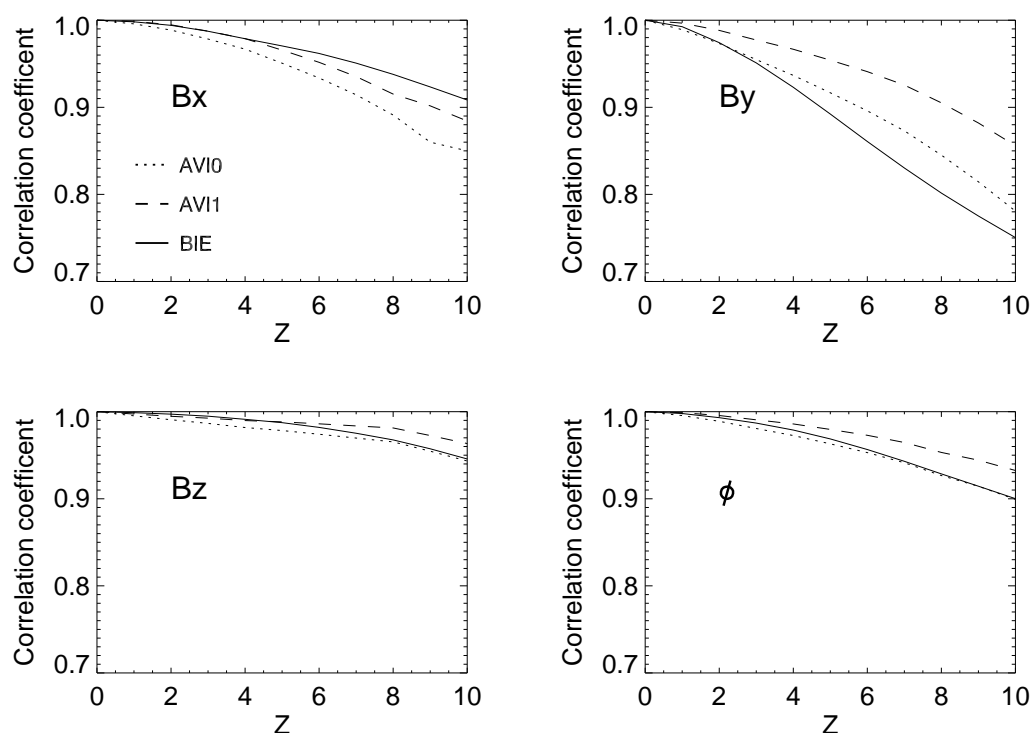


图 2.9: 在不同计算高度处, AF2 与不同外推方法 (BIE, AVI0 和 AVI1 方法) 得到的磁场的 B_x , B_y , B_z , 方位角 (ϕ) 的相关性。

同时也有不足之处如下:

在 AVI 方法中, 由于外推磁场时用到了微分求解过程, 所以是无法完全地避免奇点问题。在这个工作中, 我们做了小尺度的平滑处理来尽量避免奇点问题, 同时得到了好于 Song *et al.* (2006) 的 AVI0 方法的结果。虽然如此, 通过分析可以看出, 比较可靠的结果仍然限制于外推高度比较低层次。所以这种方法仍然需要有待于提高外推的性能。但是 AVI 方法的优势在于, 该方法不需要大量的计算时间。对于在这个工作中用的计算机 (Intel Pentium 4 CPU 3.00 GHz, RAM 1.0 GB), 它只需要 10 分钟就可以把 64×64 的网格从 $z = 0$ 外推到 $z = 64$, 其中产生 320 个文件 (对应不同的高度, $\Delta z = 0.2$)。

BIE 方法应用格林函数将磁场外推问题转换到求解亥姆霍兹方程, 然后利用积分方法求解亥姆霍兹方程同时得到外推磁场。因此, 这里面就没有关于奇点的问题 (如, AVI 方法中的奇点问题很难处理)。BIE 方法的关键是: 是否可以

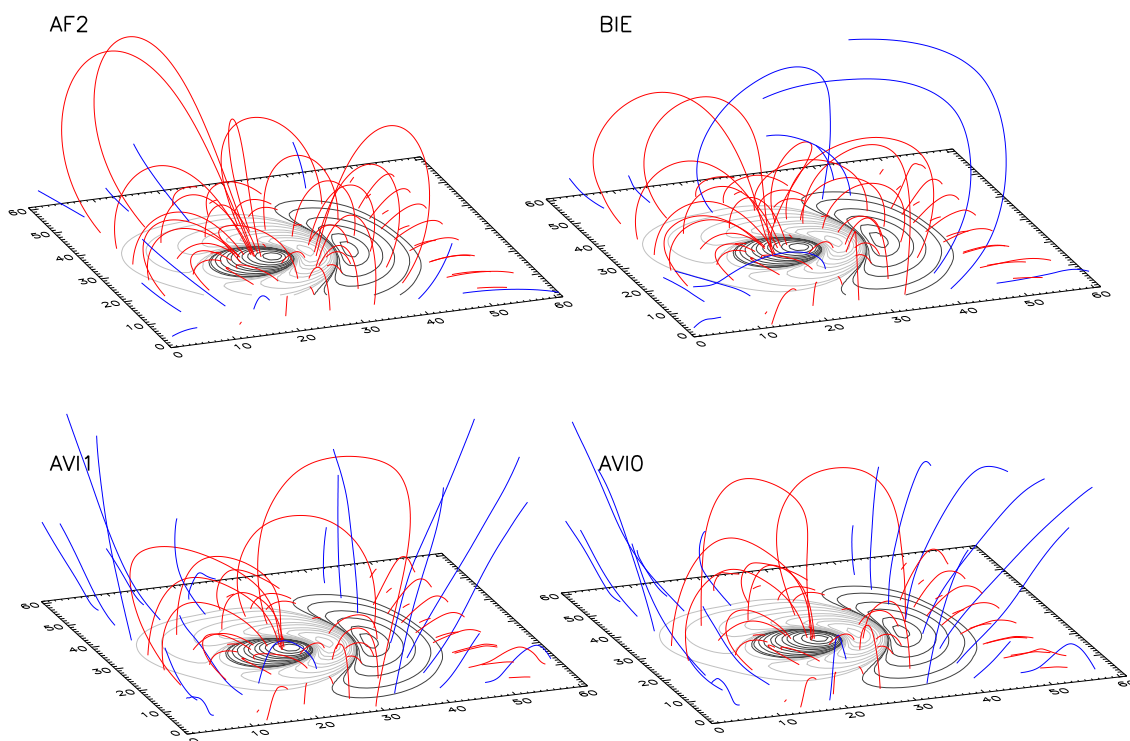


图 2.10: AF2 以及对应外推磁场的磁力线分布。

找到合理的 λ 与具体怎么迭代找出那个合理 λ ，这一点对于外推结果的影响是主要的。例如，如果在这个工作中提高了计算能力，我们就可通过增加迭代次数和计算精度来得到更加精确的外推结果。对于本工作用到的计算机（如 AVI），BIE 方法需要运行 10 个小时才能将 64×64 的网格从 $z = 0$ 外推到 $z = 64$ ，并且这里的间隔是 $\Delta z = 1$ 。所以，计算速度对 BIE 方法来说是一个很大的限制，同时也是一个需要迫切解决的问题。

2.4 本章结论

本章的主要工作是利用 Low & Lou 解析场研究两种非线性磁场外推方法的有效性和适用性。通过研究比较可以得出的结论就是：在高度低于 15% 的底面尺度下，两种非线性无力场外推能够给出比较可靠的结果。

对于 AVI 外推方法可以发现它的缺点是微分计算过程不能很好的处理奇点问题，优点是计算速度比较快。对于 BIE 外推方法的问题是在一个比较大集合里寻找满足无力场方程的解消耗的计算时间非常长，求解过程中有时会给出不能很好满足条件的解（计算能力限制迭代次数和计算精度等）。

第三章 非线性无力场的无力因子 α 计算误差的研究

3.1 引言

磁场外推是研究色球及日冕磁场的一种常用方法，因此对外推场性能及误差估计的研究有着非常重要的意义。前人对外推场的研究多是定性的讨论或者将外推场的磁力线分布与观测的现象做比较 (Schrijver *et al.*, 2006; DeRosa *et al.*, 2009; Régnier *et al.*, 2004; Wiegelmann *et al.*, 2006; Régnier *et al.*, 2007)。由于不能得到太阳大气中真实的无力场，并且太阳大气中的磁场也不是完全理想的无力场，所以对外推场的误差也不可能进行准确的估计。以前的研究基本都是借助解析场来研究外推场的性质等，并且所研究的方式方法也非常单一。所以即使就是利用解析场，寻找一个不同的方式来研究外推出的无力场也是非常有意义的。对于非线性外推场，反映其非势程度的无力因子 α 是一个非常重要的物理量：如，它可以反映磁场承载电流的情况；磁力线扭曲状态；外推场的非势程度等。所以对无力场的 α 的研究在一定意义上可以检验外推方法的性能。

无力因子 α 是一个空间位置的标量函数，它有一个重要的性质是：沿着同一条磁场线上 α 为常数，该性质的证明如下：

对方程 (1.3) 两边取散度，左端为 $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0$ 。右端为：

$$\nabla(\alpha\mathbf{B}) = \alpha\nabla \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \nabla\alpha. \quad (3.1)$$

考虑到磁场的无散方程 (1.4)，可以得到方程 (3.2)

$$\mathbf{B} \cdot \nabla\alpha = 0. \quad (3.2)$$

方程 (3.2) 表示的是 α 在磁场 \mathbf{B} 的方向上没有梯度（在磁场方向没有变化），即说明 α 在同一条磁场线上为常数，所以同一条磁力线上 α 的偏差能够反映该磁场满足无力场的程度。

既然 α 是非线性外推场的重要参量，并且知道它有如此特殊性质：即同一条磁场线上 α 为常数，当然在不同的磁场线之间是可以改变数值的。所以可以利用外推磁场中 α 来研究非线性外推场的性质以及检验磁场外推方法的性能。

在本章的工作中，我们利用 Low & Lou (1990) 解析场，从无力因子 α 的角度研究三种非线性无力场外推方法。其中，比较了外推场与解析场的 α 的差别；估计在计算 α 过程中的计算误差；并主要研究了同一条磁力线上的 α 的性质。

本章的具体安排是：首先，在第二节介绍外推方法及解析场；第三节，给出结果和讨论；第四节，对本章做一个小结。

3.2 外推方法及解析场

这部分工作，我们研究了三种非线性外推方法（近似向上积分方法，边界积分方法，优化方法）。优化方法为 Wiegmann 于 2004 年改进的积分方法，参见第一章 (1.2.3.5) 优化方法。边界积分方法，近似向上积分方法具体理论和算法同样参考第一章 (1.2.3.6) 边界积分方法以及第一章 (1.2.3.7) 近似向上积分方法。

这里用的解析场同第二章，只是由于该工作的主要方面是研究 α ，所以在解析场中保存了 3 维空间 α 数值解信息。同样第一个解析场标记为 AF1，参数取为： $n = 1, m = 1, l = 0.3, \phi = \frac{\pi}{4}$ ，在直角坐标系下设定： $x \in [-0.5, 0.5], y \in [-0.5, 0.5], z \in [0, 1]$ 。第二个解析场标记为 AF2，参数取为： $n = 3, m = 1, l = 0.3, \phi = \frac{4\pi}{5}$ ，直角坐标系下： $x \in [-0.5, 0.5], y \in [-0.5, 0.5], z \in [0, 1]$ 。参数的意义见第一章 (1.3) 非线性解析场。

3.3 结果与讨论

3.3.1 AF1的结果

图 3.1 为四种无力场磁力线的分布图，其中标记：AF1 为第一个解析场，AVI 为相对应的向上积分外推场，BIE 为相对应的边界积分外推场，Opt. 为对应的优化外推场。对比图中磁力线的分布可以看到，三种非线性外推场的磁力线基本与解析场的磁力线是符合的。所以在这样大尺度空间结构上外推场在一定程度上可以代表解析场的宏观结构。

$$\left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right)/B_x = \alpha_1, \quad (3.3)$$

$$\left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right)/B_y = \alpha_2, \quad (3.4)$$

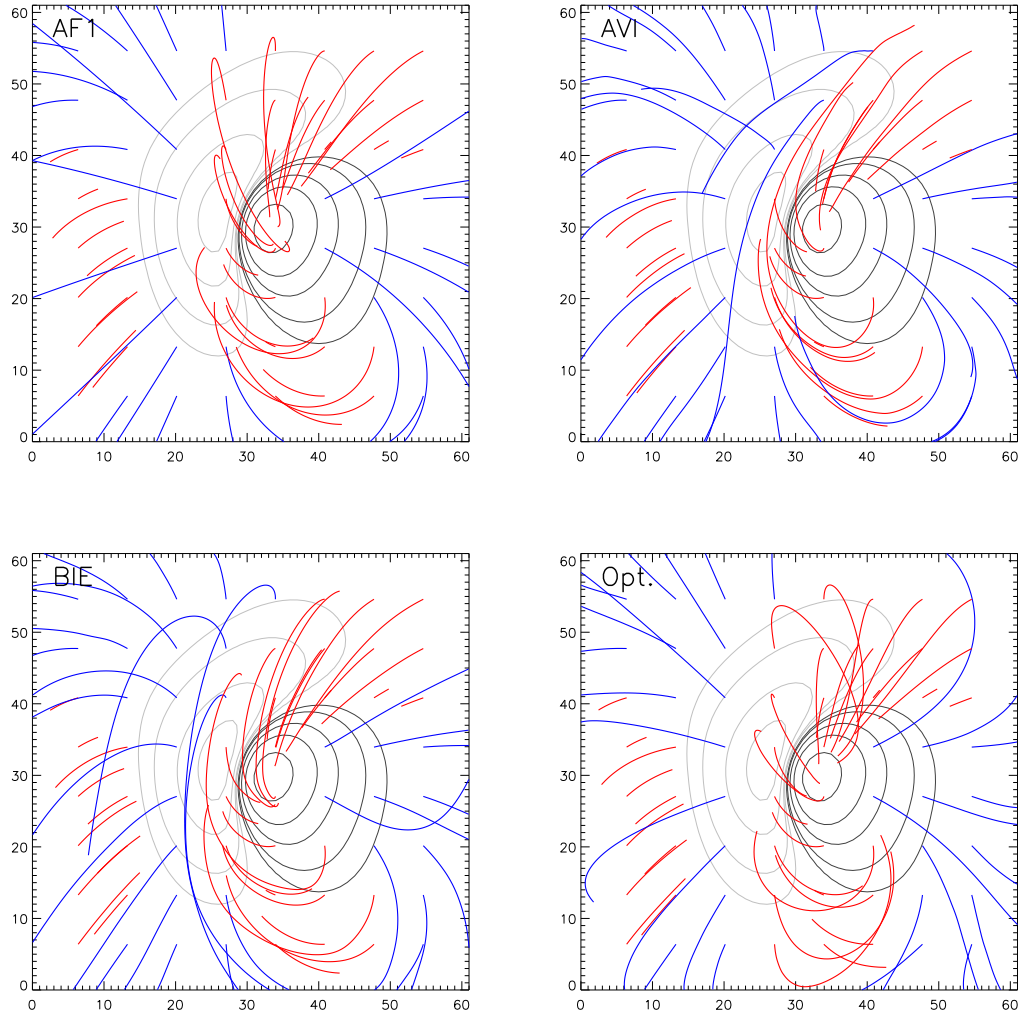


图 3.1: 四种非线性无力场磁力线分布 (AF1 为解析场, AVI 为向上积分外推场, BIE 为边界积分外推场, Opt. 为优化外推场)。

$$\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)/B_z = \alpha_3. \quad (3.5)$$

因为有了 3 维磁场信息, 因而可以利用磁场分量 B_x , B_y , B_z 的 3 维信息由三个公式 (3.3), (3.4) 和 (3.5) 分别求出 3 个 α 的数值 α_1 , α_2 和 α_3 , 因为 α 是空间位置的标量函数, 所以理论上 α_1 , α_2 和 α_3 应该为同一个数值。图 3.2 给出的是解析场 AF1 在高度 $z = 0$ 处, 利用公式 (3.3) (3.5) 求得的 α (行 1 和 3),

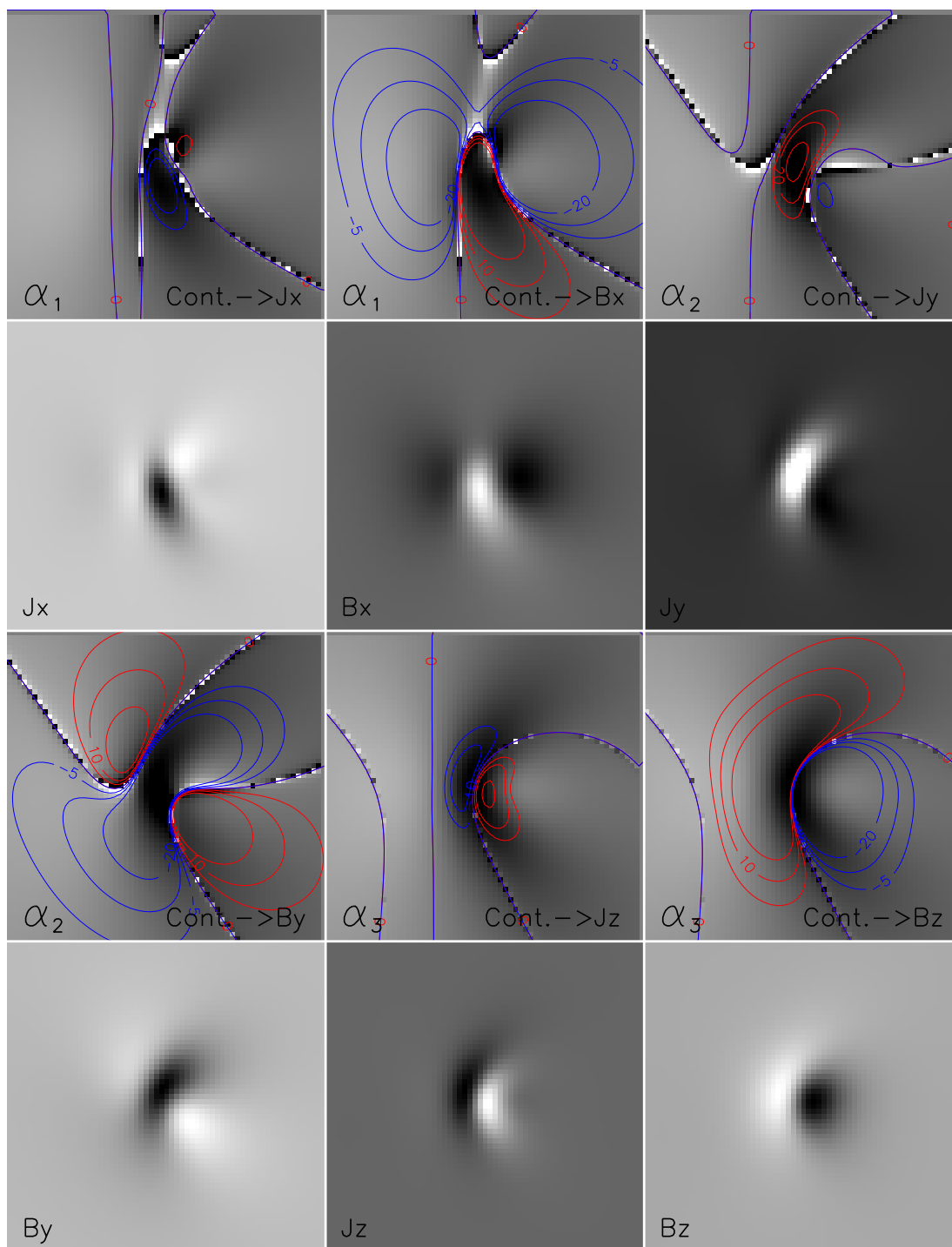


图 3.2: 解析场 AF1 中 $z = 0$ 处, α_1 , α_2 和 α_3 , 磁场分量 (B_x , B_y , B_z) 和电流分量 (J_x , J_y , J_z) 图, 其中相应的等高线已经对应的标记出。

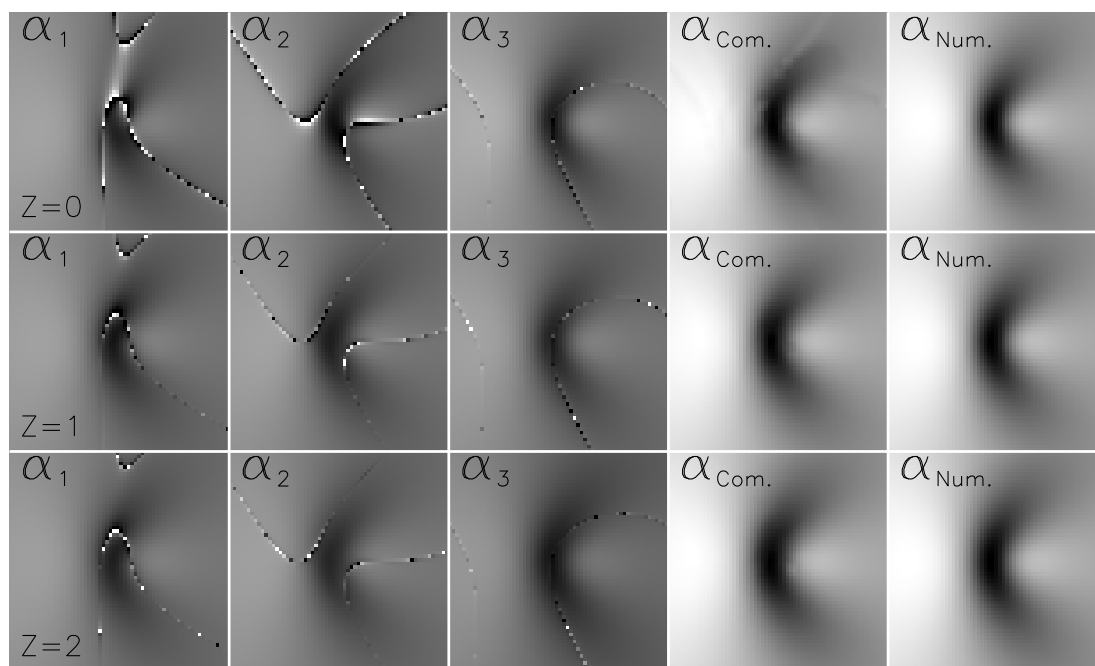


图 3.3: 解析场 AF1 中 $z = 0, z = 1, z = 2$ 处, α_1, α_2 和 α_3 , 优化组合的 $\alpha_{Com.}$ 以及相应的 α 数值解 $\alpha_{Num.}$ 。

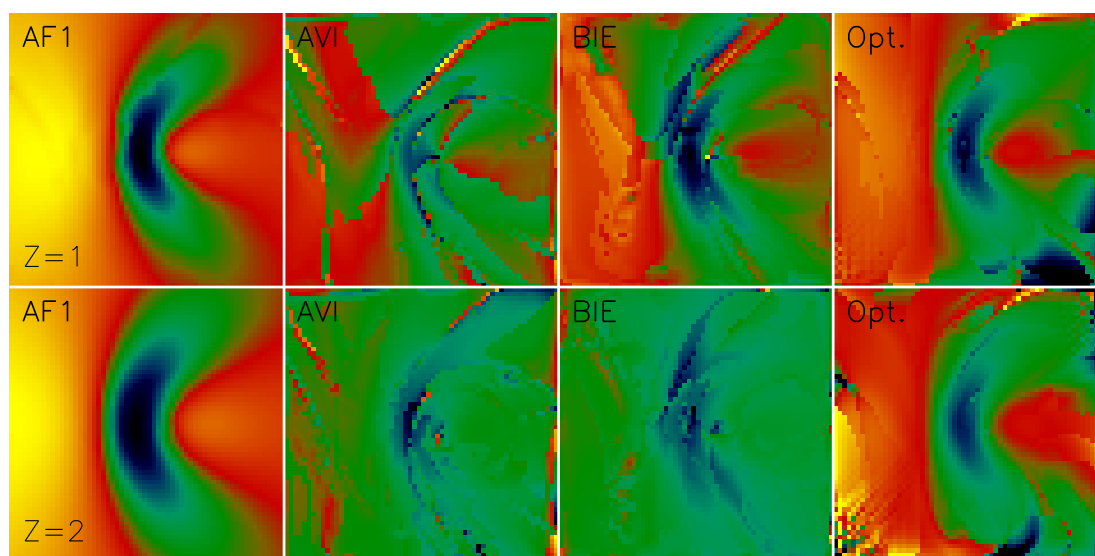


图 3.4: 高度 $z = 1, z = 2$ 处, 四种无力场 α 分布图。

图中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 分别表示 α 由式 (3.3), 式 (3.4), 式 (3.5) 得到。在图 3.2 同时给出了磁场分量与对应的电流分量 ($J_x = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}$, $J_y = \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}$, $J_z = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}$)。为了研究磁场与电流对计算 α 的影响, 我们将由不同公式求得的 α 叠加上了对应的磁场与电流分量的高线 (Contour), 所以 α_1, α_2 和 α_3 都重复地画了一次。例如, 第一行的第一列与第二列图显示的都是 α_1 , 第二行的第一列与第二列图正是求解 α_1 用到的磁场与电流分量, α_1 灰度图上的等高线就图下边磁场分量或者电流分量的等高线 (这里所有的灰度图都是白色区域代表正值, 黑色区域代表负值)。因为图 3.2 对应的是解析场, 所以此图说明的是任意一个公式利用磁场求得的 α 都不可避免地存在着计算误差。计算误差大都分布在相应的磁场分量发生极性反转的位置, 而且对于不同的平面都是一致的。由于 α 为空间位置的标量函数, 所以由不同平面求得的 α 来优化最终得到的 α 值应该是更加准确的, 从而将计算误差降到最小。

为了得到精确的 α 值, 这部分工作中所给的 α 结果是由 α_1, α_2 和 α_3 优化组合得到的。实现这种优化组合的方法是: 对于一个确定的位置的 α , 取 3 个值 ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$) 中最接近 2 个值的平均值, 这也就是意味着其中偏离比较大的值被强行地去掉。从图 3.3 就可以看到这个优化组合的过程, 图 (3.3) 中给出了解析场在高度为 $z = 0, z = 1, z = 2$ 处, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 优化组合的 $\alpha_{Com.}$, 以及对应的 α 数值解 $\alpha_{Num.}$ 。从图中可以看出, 任意一个公式由磁场求得的 α 都存在明显的计算误差。经过计算可求得的 α_1 与其对应的 $\alpha_{Num.}$ 的相关系数是: α_1 与 $\alpha_{Num.}$ 是: 97.09% ($z = 0$), 92.42% ($z = 1$), 97.29% ($z = 2$); α_2 与 $\alpha_{Num.}$ 是: 93.91% ($z = 0$), 89.23% ($z = 1$), 90.55% ($z = 2$); α_3 与 $\alpha_{Num.}$ 是: 90.69% ($z = 0$), 91.35% ($z = 1$), 93.79% ($z = 2$); 而优化组合后的 $\alpha_{Com.}$ 与其数值解 $\alpha_{Num.}$ 的相关系数是: 99.61% ($z = 0$), 99.93% ($z = 1$), 99.91% ($z = 2$)。可见优化组合后的 $\alpha_{xyz-com}$ 可以更好的与其数值解符合, $\alpha_{Com.}$ 的精确度得到了很大的提高。这样即说明这种办法对于这部分研究是有效并应该采用的。

图 3.4 给出的是在高度 $z = 1, z = 2$ 处, 解析场 AF1, AVI 场, BIE 场, Opt. 场的 α 分布图。尽管计算误差已经尽力达到最小, 并且在图 3.1 中可以看到四种无力场的磁力线分布能够比较好的符合, 但是在图 3.4 中还是可以看到外推场与解析场的 α 仍然存在明显的偏差。图中解析场与外推场 α 相关系数是: $z = 1$ 时, AVI 场 36.86%; BIE 场 49.39%; Opt. 场 67.68%, $z = 2$ 时, AVI

场 42.13%; BIE 场 41.52%; Opt. 场 59.63%。此偏差应该是主要由于解析场与外推场的偏差而引起的, 因为通过对解析场中 α 计算的分析可以看到, 最后得到的 $\alpha_{Com.}$ 与其数值解 $\alpha_{Num.}$ 的相关系数都能达到 99% 以上, 所以在计算 α 过程中的计算误差不应该产生这样明显的偏差。

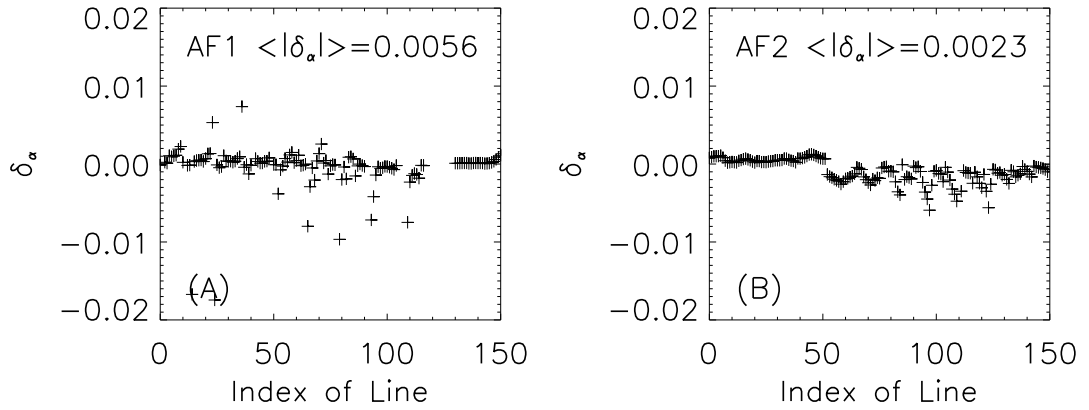


图 3.5: 由两个解析场 (A 对应 AF1, B 对应 AF2) 数值解 $\alpha_{Num.}$ 求得的磁力线的 RSD (δ_α) 散点图。

本部分工作另一个研究重点就是检查同一条磁力线上的 α 是否为常数。我们定义一个关于偏差的物理量, 即磁场中一条磁力线上 α 的相对标准偏差 (relative standard deviations (RSD)), RSD 定义为式 (3.6), 即该条磁力线上 α 的标准差除以相应的平均值, 其中 N 为该条磁力线上所要计算的点数。为了说明计算过程中是否能够保证准确地追踪一条磁力线, 图 3.5A 给出了 AF1 中由 α 数值解 ($\alpha_{Num.}$) 计算得到的磁力线 RSD 的散点图, 横坐标是条磁力线编号 (随机内插得到的 150 条磁力线), 纵坐标是 RSD 的数值 (用 δ_α 表示), 因为图中的所有点的 RSD 数值非常小并且特别集中, 所以该图说明在计算过程中能够很好地追踪到磁力线, 由此引起的误差为 0.5% (即, 所有磁力线 RSD 绝对值的平均 $\langle |\delta| \rangle = \langle |RSD| \rangle = 0.5\%$)。

图 3.6 给出的是 AF1, AVI, BIE, Opt. 场中磁力线 RSD 概率分布的直方图 (注意, 这里对于 AF1, 磁力线的 RSD 是由 $\alpha_{Com.}$ 计算得到, 即用磁场求得的数据, 而不是模拟得到的 α 数值解), 其中横坐标是 RSD 的数值 (用 δ_α 表示), 纵坐标是概率密度函数 (PDF) 的分布。图 3.7 给出的是 AF1, AVI, BIE, Opt. 场中磁力线 RSD 的散点图 (同图, 3.5)。图 3.6 和 3.7 中给出解析场磁力线 RSD

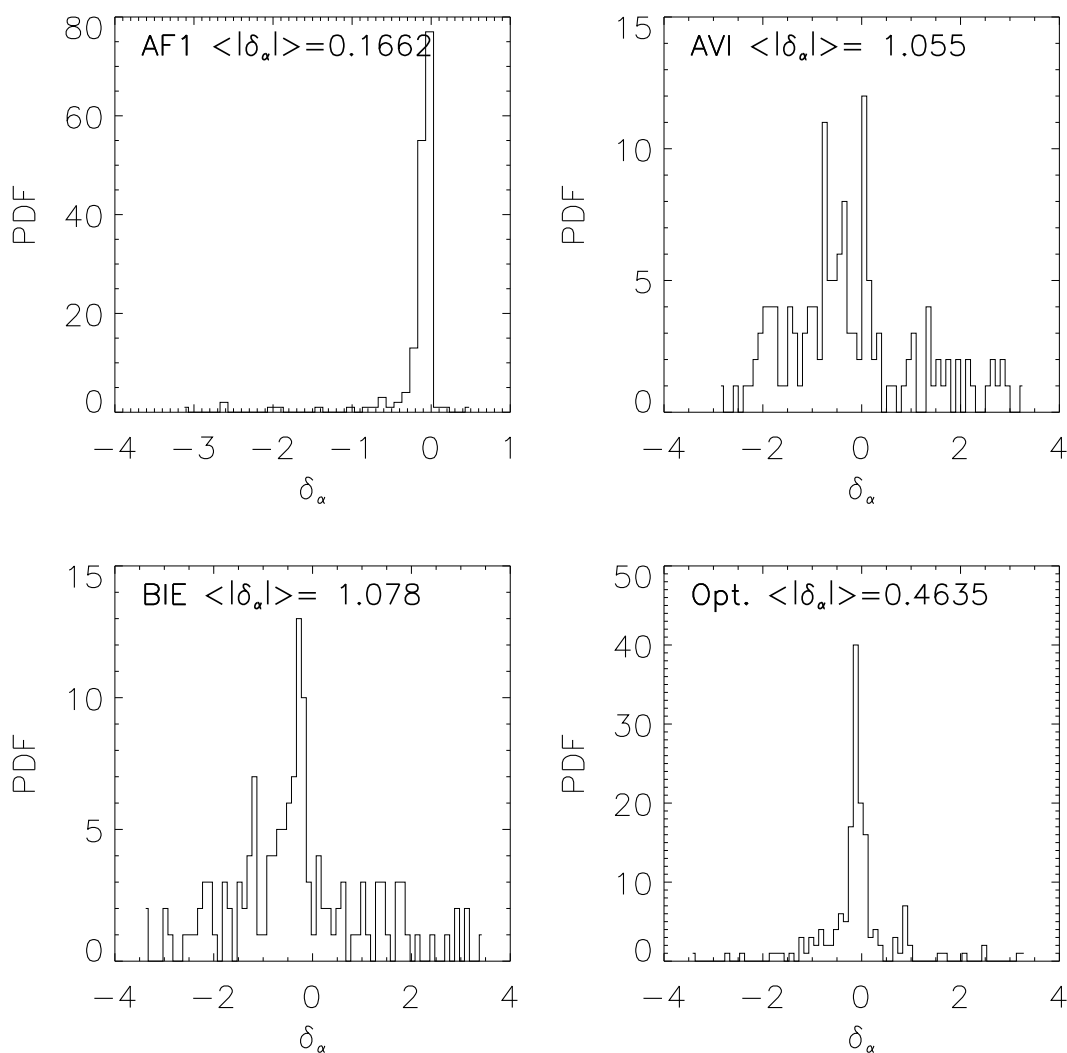


图 3.6: 四种无力场中磁力线 RSD (δ_α) 直方图。

的结果是由于它能够反映出在计算 α 及 RSD 过程中的计算误差。从图 3.6 和 3.7 中可以一致地看到 AVI 及 BIE 场的结果比较发散，并且 RSD 数值的幅度相对于 Opt. 场的结果也偏大。对于 Opt. 场中磁力线 RSD 数值的幅度相对偏小，并且数值比较集中。由图 3.7 的数据可以求得，解析场 AF1 中磁力线的 $\langle |RSD| \rangle$ (所有磁力线 RSD 的绝对值的平均) 为 0.16，这个值可以看作是在 AF1 中求解 $\langle |RSD| \rangle$ 的计算误差。对于 AVI, BIE, Opt. 场，相应的磁力线的 $\langle |RSD| \rangle$ 分别为 1.05, 1.07, 0.46。为了研究 RSD 是否与磁力线的长度有关系，

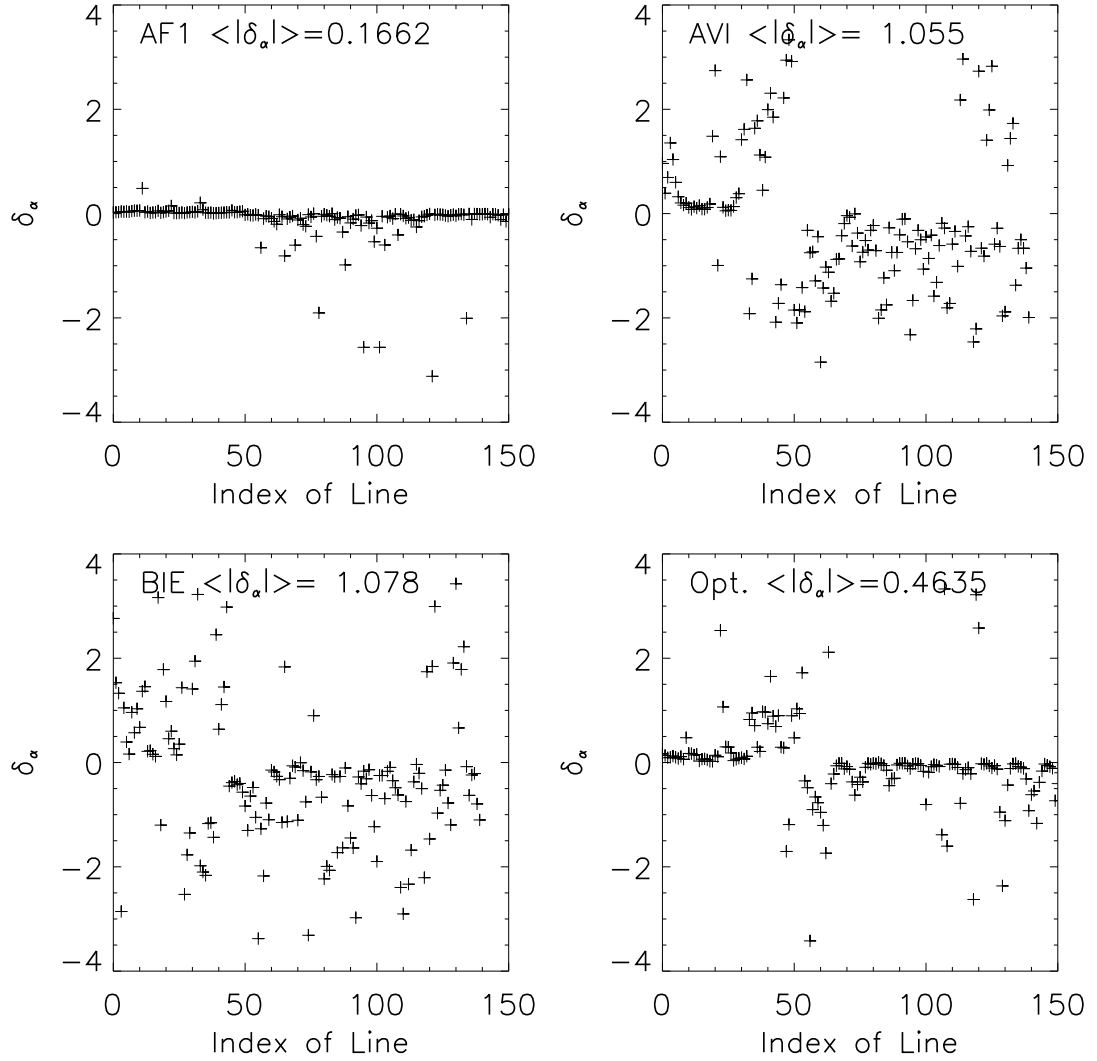
图 3.7: 四种无力场磁力线 RSD (δ_α) 散点图。

图 3.8 给出解析场 AF1, AVI 场, BIE 场, Opt. 场中的磁力线上 α 的相对标准偏差 (RSD) 与相应的磁力线长度的散点图, 其中纵坐标表示 RSD, 横坐标为对应的磁力线的长度 (单位是该线上点数, 点数越多意味磁力线越长)。从图中可以看出 RSD 基本不依赖于磁力线的长度。

$$RSD = \frac{1}{\langle \alpha \rangle} \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} (\alpha_i - \langle \alpha \rangle)^2}. \quad (3.6)$$

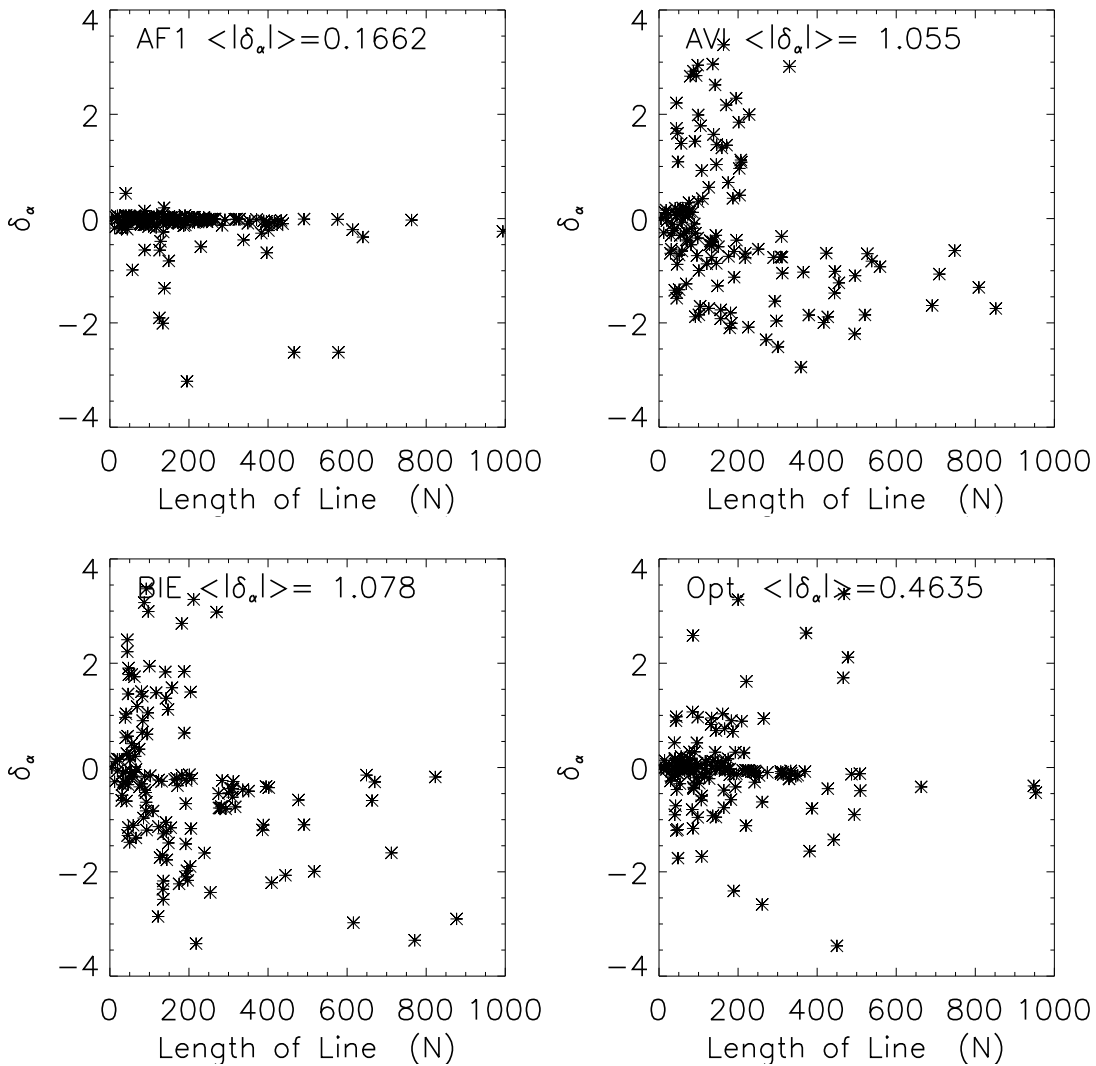


图 3.8: 四种无力场中磁力线 RSD (δ_α) 与磁力线长度散点图。

3.3.2 AF2的结果

图 3.9 为四种无力场的磁力线的分布图，同样标记：AF2 为第二个解析场，AVI 为相对应的向上积分外推场，BIE 为相对应的边界积分外推场，Opt. 为对应的优化外推场。对比此图中磁力线的分布，尽管不同的外推场的磁力线的分别有着比较细微的差别，总体上，三种非线性外推场的磁力线基本与解析场的磁力线符合。

同图 3.2，图 3.10 给出了解析场 AF2 在高度 $z = 0$ 处 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ，磁场分量以

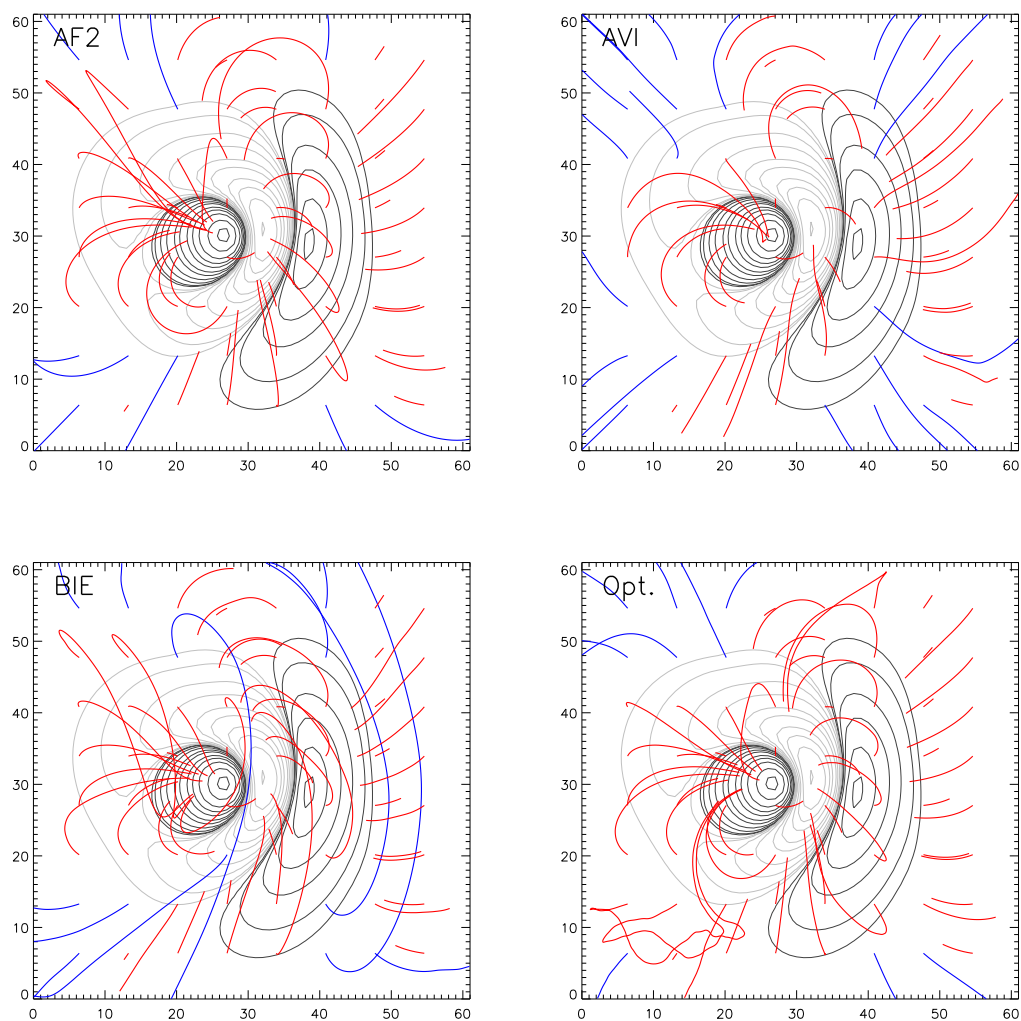


图 3.9: 四种非线性无力场磁力线分布 (AF2 为第二个解析场, AVI 为向上积分外推场, BIE 为边界积分外推场, Opt. 为优化外推场)。

及相应的电流分量。与 AF1 类似, 可以看出利用磁场求得的 α , 都不可避免地存在计算误差。计算误差大都分布在相应的磁场分量发生极性反转的位置。同图 3.3, 图 3.11 给出了解析场 AF2 中 α 优化组合的过程, 可以看出, 无论是 α_1 , α_2 , 还是 α_3 都存在明显的计算误差。同对 AF1 的分析一样, 我们也计算了相应的相关系数为: α_1 与 $\alpha_{Num.}$ 是: 96.62% ($z = 0$), 94.68% ($z = 1$), 93.06% ($z = 2$); α_2 与 $\alpha_{Num.}$ 是: 92.31% ($z = 0$), 94.26% ($z = 1$), 97.27% ($z = 2$); α_3 与 $\alpha_{Num.}$

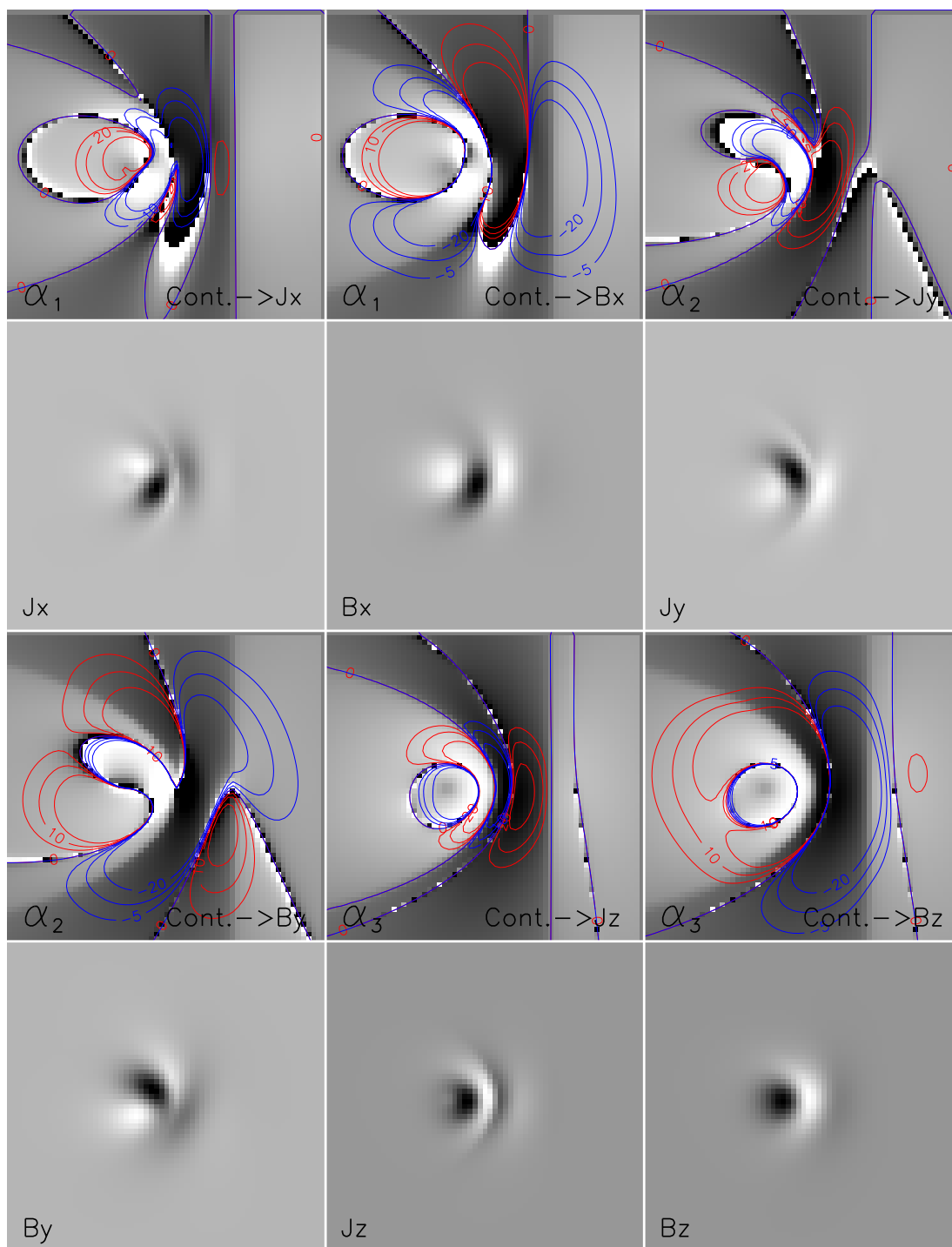


图 3.10: 解析场 AF2 中 $z = 0$ 处, α_1 , α_2 和 α_3 , 磁场分量 (B_x , B_y , B_z) 和电流分量 (J_x , J_y , J_z) 图, 其中相应的等高线已经对应的标记出。

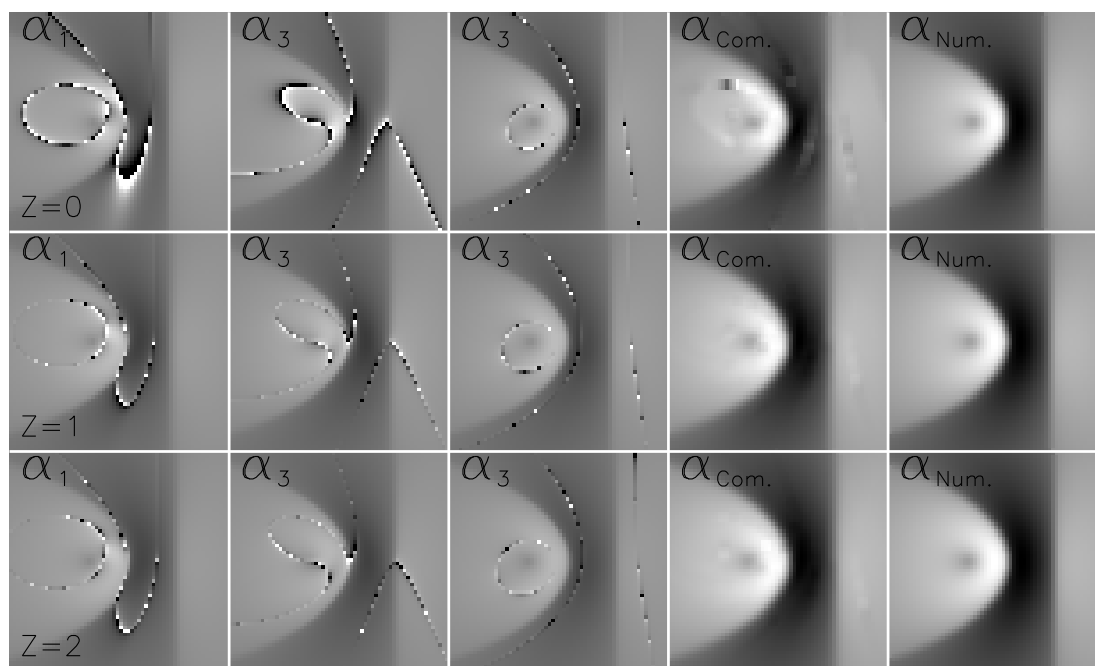


图 3.11: 解析场 AF2 中 $z = 0, z = 1, z = 2$ 处, α_1, α_2 和 α_3 , 优化组合的 $\alpha_{Com.}$ 以及相应的 α 数值解 $\alpha_{Num.}$ 。

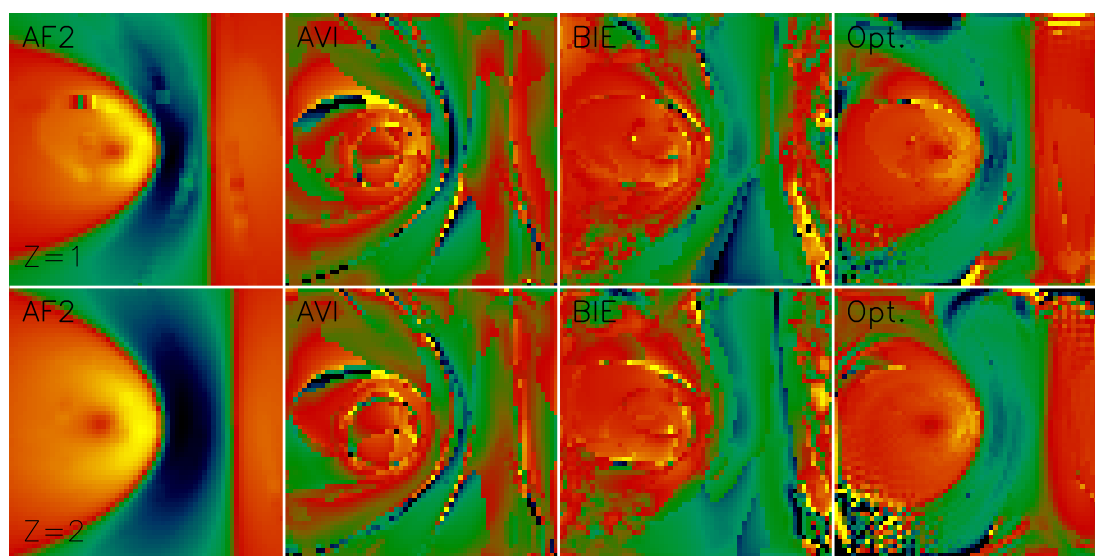


图 3.12: 高度 $z = 1, z = 2$ 处, 四种无力场 α 分布图。

是: 92.59% ($z = 0$), 94.26% ($z = 1$), 97.27% ($z = 2$); 而优化组合后的 $\alpha_{Com.}$ 与其数值解 $\alpha_{Num.}$ 的相关系数是: 99.39% ($z = 0$), 99.53% ($z = 1$), 99.59% ($z = 2$)。可见优化组合后的 $\alpha_{Com.}$ 的精确度明显地得到了提高。

图 3.12 给出的是在高度 $z = 1, z = 2$ 处, 解析场 AF2, AVI 场, BIE 场, Opt. 场的 α 分布图。可以看到外推场与解析场的 α 仍然存在明显的偏差。此图中解析场与外推场 α 相关系数是: $z = 1$ 时, AVI 场 54.41%; BIE 场 77.42%; Opt. 场 72.53%, $z = 2$ 时, AVI 场 59.75%; BIE 场 73.01%; Opt. 场 68.45%。引起该偏差的主要原因仍然应该是解析场与外推场之间存在差异。

图 3.5B 给出了 AF2 中由其 α 数值解 ($\alpha_{Num.}$) 计算得到的磁力线 RSD 的散点图。同图 3.5A, 它也说明计算过程中能够准确地追踪到某一条磁力线, 对于 AF2 由此引起的误差为 0.2%。

图 3.14 给出的是解析场 AF2, AVI 场, BIE 场, Opt. 场中磁力线上 α 的 RSD 的散点图。其中解析场 AF2 的 $\langle |RSD| \rangle$ 是 0.13, 即 AF2 中 RSD 的计算误差。AVI, BIE, Opt. 场, 其磁力线的 $\langle |RSD| \rangle$ 分别为 0.80, 0.85, 0.39。与第一个解析场的结果相同, 这里仍然是 Opt. 场的结果优于另外两个外推场的结果。图 3.15 给出解析场 AF2, AVI 场, BIE 场, Opt. 场中磁力线上 α 的 RSD 与相应的磁力线长度的散点图。同 AF1, 很难发现 RSD 与磁力线长度的关系。

3.3.3 讨论

磁场外推是研究日冕 3D 空间磁场的有效工具, 而且在宏观上外推场的磁力线基本能与日冕的观测现象相符合。即使不考虑外推磁场模型合理与否, 磁场外推的性能本身也是值得深入研究的。这部分工作主要研究了无力场中的无力因子 α 的分布和偏差。研究目的就是给出什么程度上沿一条磁力线上的 α 能保持一个常数, 同时分析了由磁场计算 α 产生的误差。

通过分析可以看出直接由磁场计算无力因子 α 必然存在计算误差, 明显的误差大都出现在磁场分量反转的位置。对于本部分工作中的两个解析场 AF1 和 AF2, 特定的磁力线 α 的 $\langle |RSD| \rangle$ 为 0.1 ~ 0.2, 这个可以看作在计算 $\langle |RSD| \rangle$ 时完全有计算误差带来的。

研究发现外推场与解析场的 α 在存在明显的差异, 这个差异包括了计算 α 时的计算误差以及外推场与解析场之间的偏差。对于解析场 AF1, 部分选定的特定磁力线上 α 的 $\langle |RSD| \rangle$ 是: AVI 外推场为 1.05; BIE 外推场为 1.07; Opt.

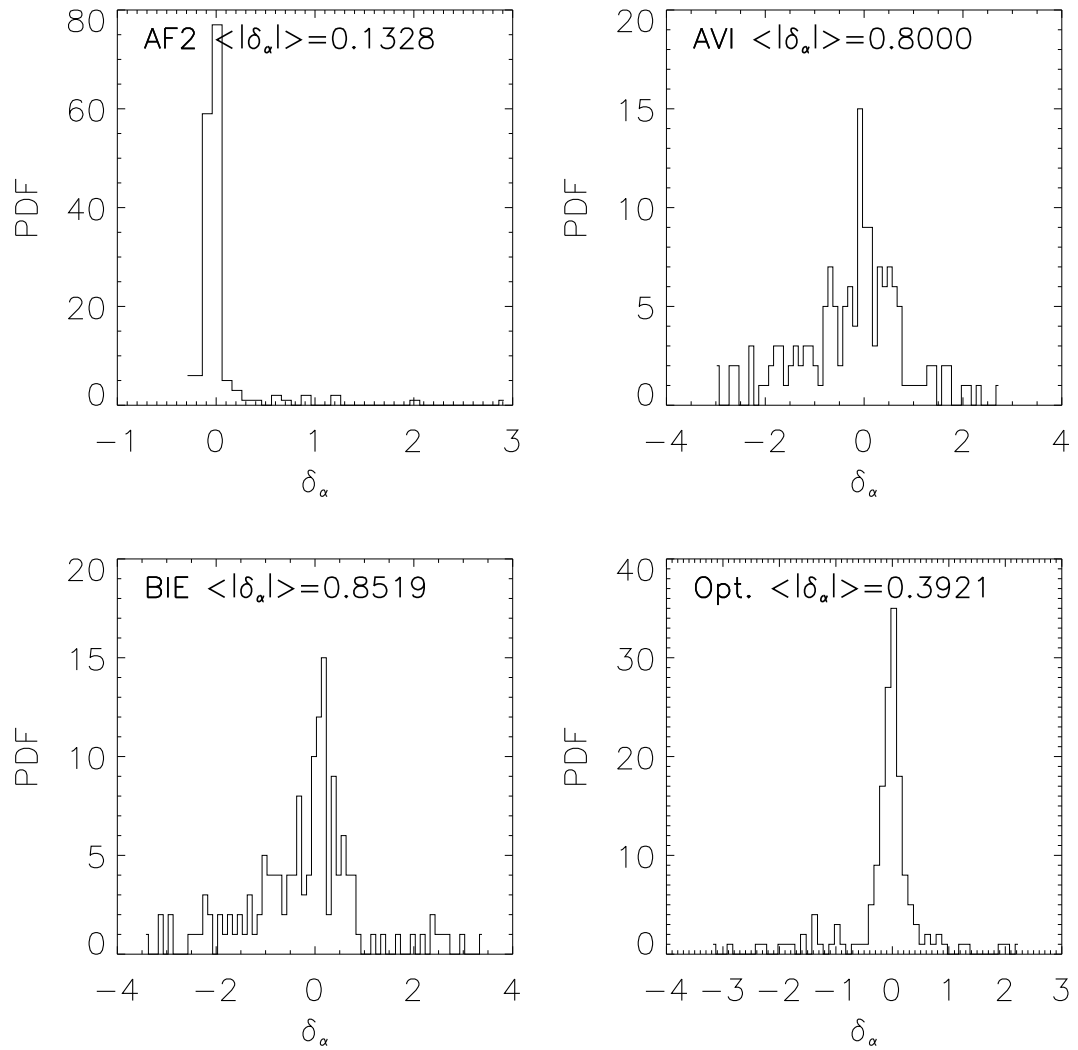


图 3.13: 四种无力场中磁力线 RSD (δ_α) 直方图。

场为 0.46。对于 AF2，部分选定的特定磁力线上 α 的 $\langle |RSD| \rangle$ 是：AVI 外推场为 0.80；BIE 外推场为 0.85；Opt. 场为 0.39。对于这两个解析场，发现特定磁力线上 α 的 $\langle |RSD| \rangle$ 与磁场线的长度没有明显的依赖关系。

3.4 本章结论

本章主要是从无力因子 α 的角度来研究了外磁场的性能，同时分析了由磁场计算 α 的计算误差。排除由磁场计算 α 的计算误差（利用解析场求得），各种

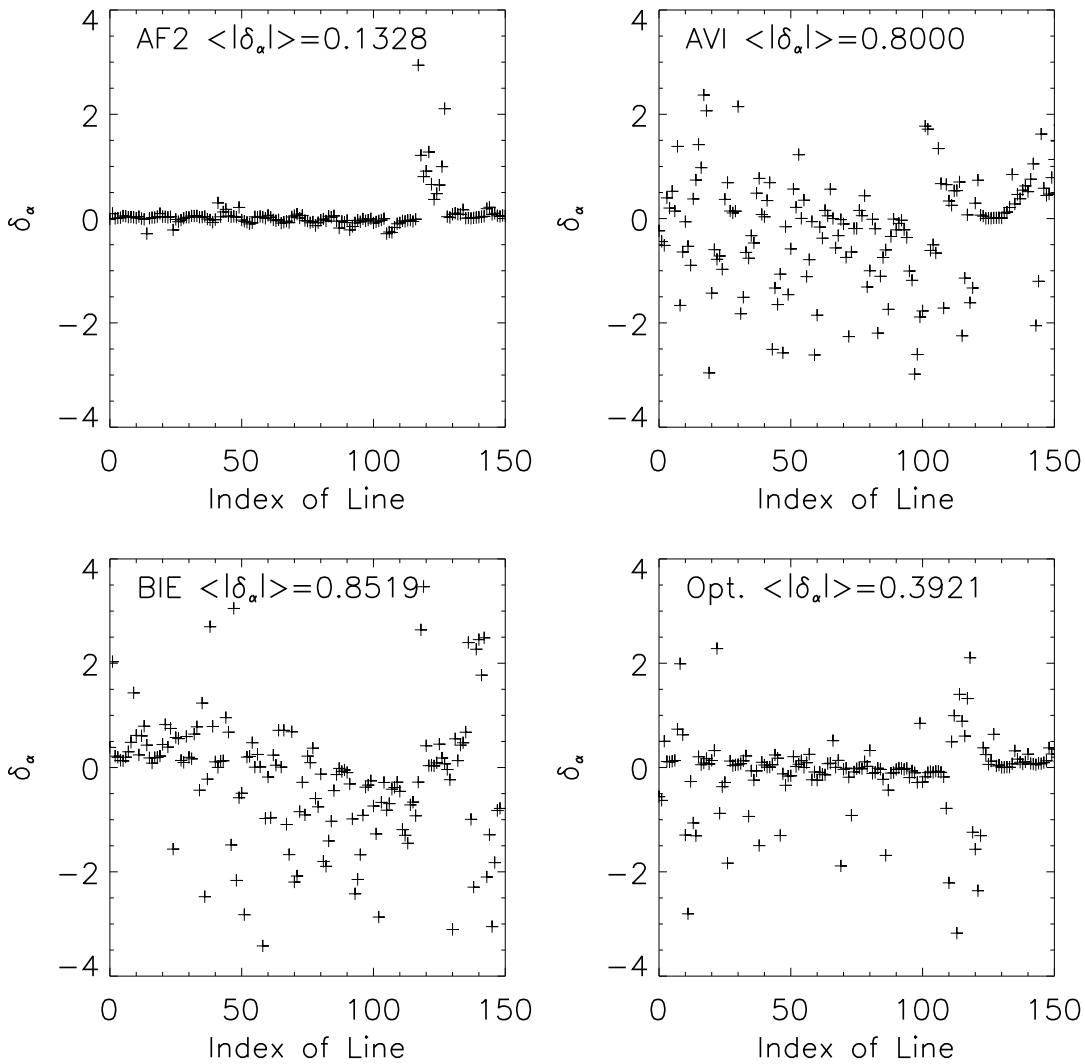
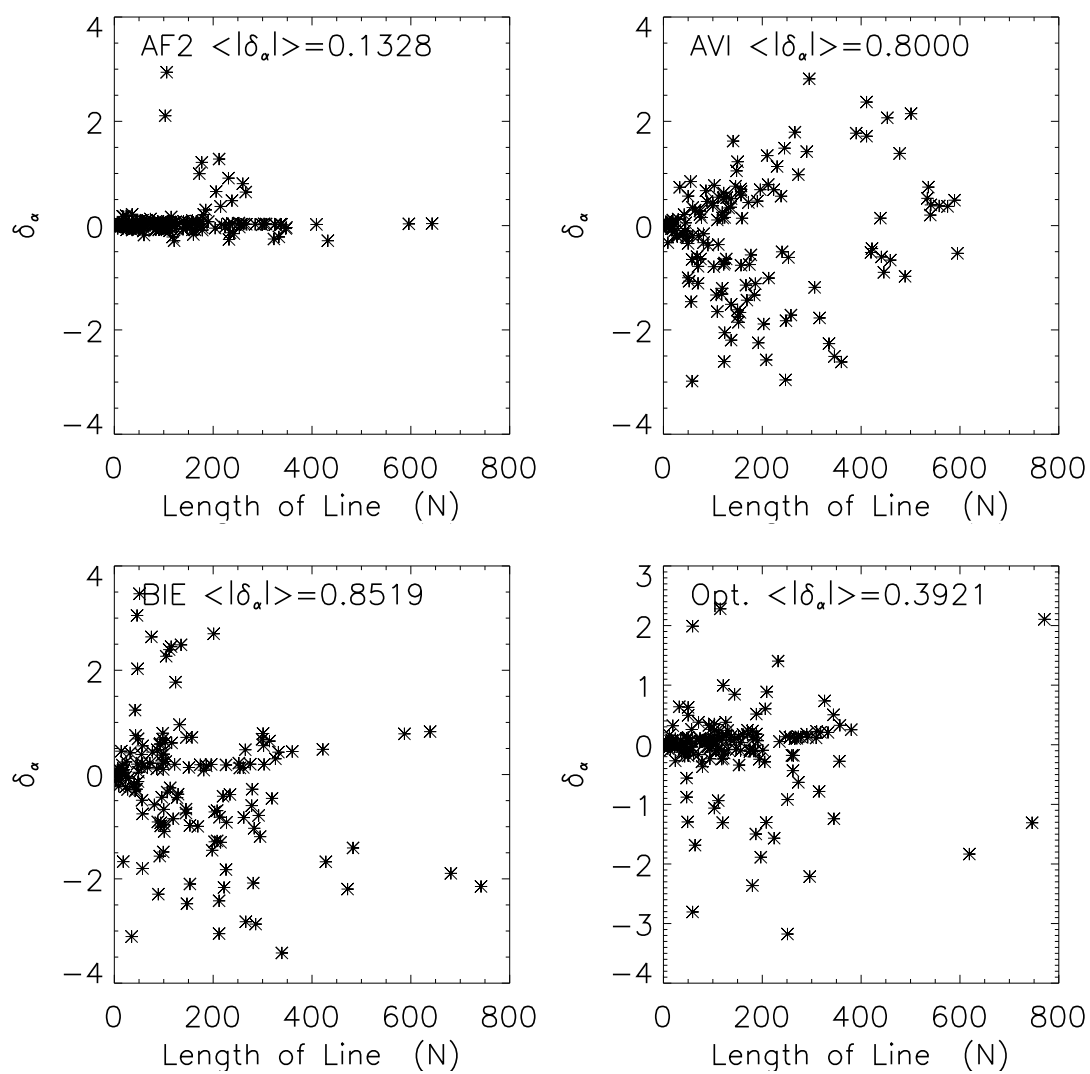


图 3.14: 四种无力场中磁力线 RSD (δ_α) 散点图。

外推场沿着一条磁力线的 α 仍然不能比较严格地保持为一个常数。这就在一定程度上反映了外推出的磁场在满足无力无散条件方面是存在着一定的问题的。由于无力场理论模型不是特别完备，并且具体的技术操作上以及求解过程中还是存在着一定的限制，从而还不能保证完全达到无力无散要求。

图 3.15: 四种无力场中磁力线 RSD (δ_α) 与磁力线长度散点图。

第四章 宁静区势场与非线性无力场的比较

4.1 引言

目前,大部分对于太阳磁场的研究都是关于活动区的,其实了解太阳宁静区的磁场同样重要,因为大部分的太阳表面都为宁静区所占据,甚至在太阳活动极大年也是如此。由于观测的限制,目前还无法了解到太阳磁场是如何从光球传输到色球和日冕的准确信息。在理论上, Gabriel (1976) 预言太阳磁场从光球扩散到日冕形成一个伞盖结构。但是现在仍然不能从观测方面证实 Gabriel 的理论。虽然如此,光球磁场与色球、日冕观测特征的关系还是能够提供一些关于磁场扩散的信息。

一些研究人员分析光球磁场与色球磁场的关系,来研究磁场的扩散情况(如, Zhang, 1996; Almeida, 1997; Démoulin *et al.*, 1997; Cuperman *et al.*, 1997; Zhang & Zhang, 1999; Zhang & Zhang, 2000a, b; Harvey, 2006a)。例如, Zhang (1996) 认为磁场以纤维状从光球扩散到色球。Zhang & Zhang, (2000a) 发现在太阳宁静区光球磁场与色球磁场有一定的相似性。另有一些研究人员讨论了光球磁场与过渡区/日冕磁场的关系。(如, Giovanelli, 1980; Dowdy *et al.*, 1986; Schrijver *et al.*, 2003; Harvey 2006b; Philip 2008; Dimitropoulou *et al.*, 2009)。例如, Schrijver *et al.* (2003) 指出相对强的网络内磁场的磁力线在几千公里将返回光球。Dimitropoulou *et al.* (2009) 发现光球的上 2D 不规则碎片大小与势场近似下或者线性磁场外推日冕中的 3D 磁场的对应部分有明显的相关性,虽然在非线性外推场中没有发现此规律。

以光球磁场为边界条件,基于无力场假设 (Aly, 1989) 的磁场外推是研究色球和日冕磁场性质与结构的一种方法。应用磁场外推的优点是它能够提供足够的空间磁场信息。总体上来说,大部分磁场外推方法都能够被用来描述太阳活动区的磁场拓扑结构(如, Régnier *et al.*, 2002; Régnier & Amari, 2004; Wiegmann *et al.*, 2006; Song *et al.*, 2006; Song *et al.*, 2007; He, Wang & Yan, 2008; Schrijver *et al.*, 2008; Jing, 2008; DeRosa *et al.*, 2009)。但是由于太阳活动区磁场比宁静区磁场更加可靠(活动区强磁场有比较高的信噪比),况且相对于活动区,宁静区更容易违背无力场假设,所以目前很少用磁

场外推来研究太阳的宁静区磁场。Régnier *et al.* (2008) 利用势场近似来研究宁静区日冕磁场的零点密度。Tu *et al.* (2005) 用线性外推场来研究太阳风的起源并给出了太阳宁静区磁场 3D 结构。他们的结果没有发现伞盖结构, 其结果是磁场的扩散截面几乎与高度呈线性关系。这种结果也与 Zhang & Zhang (2000b) 的结果是一致的。以上的研究所用的磁场外推都是势场近似或者为线性无力场外推。而对于实际的太阳磁场应该非线性的 (Woodard & Chae, 1999; Zhao *et al.*, 2009)。所以用非线性磁场外推更为合理, 进而比较太阳宁静区的势场与非线性外推场的差别也就成了一个非常值得研究的课题。

对于太阳活动区, 外推磁场的可靠性基本都是通过外推场的磁力线走势与观测现象 (如, EVU, X-ray 结构等) 的一致性来检验 (Régnier & Amari, 2004; Wiegmann *et al.*, 2006; Régnier, 2007)。但是目前还没有应用非线性无力场外推来研究宁静区的磁场结构的相关工作。其中主要的原因有: 可用于宁静区磁场外推的光球磁场没有活动区的可靠; 宁静区低空间分辨率的弱磁场不能很好满足无力条件。然而, 日出卫星搭载的太阳光学望远镜的光谱偏振仪 (SP/*Hinode*) 可以提供前所未有的宁静区可靠的磁场 (高时空分辨率) 并且能够测出宁静区的强磁场, 这就给宁静区非线性磁场外推研究提供了一个机会。

本章就是以 SP/*Hinode* 观测的宁静区矢量磁场为边界条件, 利用四种无力场外推方法来研究宁静区磁场的空间结构和性质以及不同外推场的差异。这一章的具体内容是: 首先, 第二节介绍数据处理及外推方法; 第三节, 给出结果与讨论, 第四节, 对本章做一小结。

4.2 数据处理及外推方法

4.2.1 数据处理

这个工作中用到的数据是由 SP/*Hinode* 在 2007 年 4 月 16 00:23 - 01:48 观测的宁静区矢量磁场。SP 利用两条磁敏感线 Fe 线 630.15 nm 和 630.25 nm 的信号来得到斯托克斯 *IQUV* 谱线轮廓, 然后去反演出矢量磁图。SP 反演磁场的方法是基于密尔恩-爱丁顿大气模型 (Milne-Eddington (ME) atmospheric model) 假设。反演磁场过程中涉及到磁场的参数是: 总场强 (\mathbf{B}), 对应于视向方向的倾角 (γ), 方位角 (ϕ) 以及填充因子 (f)。参照, Lites *et al.* (1999), 磁场的纵向分量通过 $fB\cos(\gamma)$ 求得; 横场由 $\sqrt{f}B\sin(\gamma)$ 得到。在处理横场的 180° 不

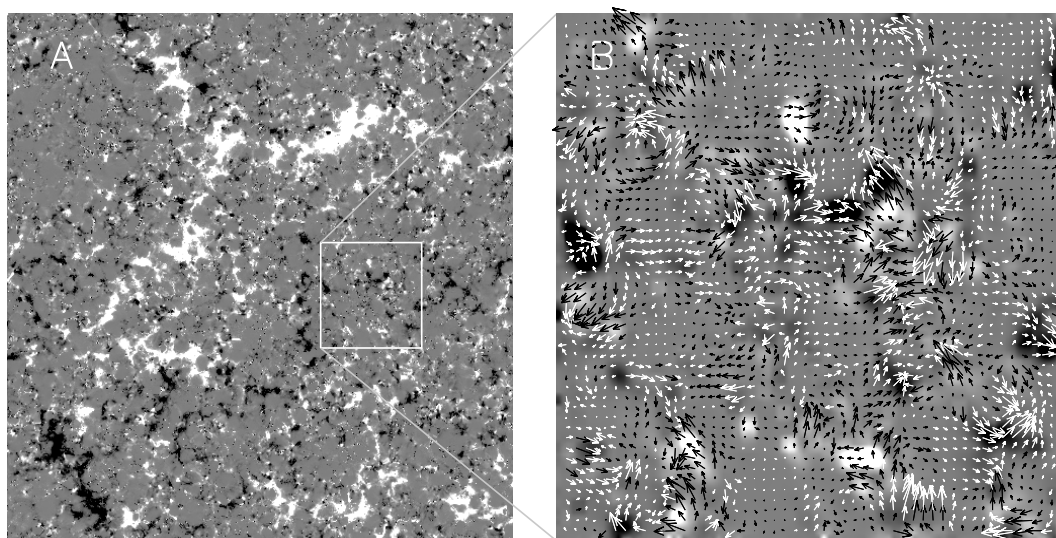


图 4.1: 左边 (A): 视向 (LOS) 磁场 (00:23 UT - 01:48 UT 2007 年 4 月 16 日)。右边 (B): 对应于左边 (A) 中白线框标记区域的矢量磁场, 其中灰度图是纵向磁场, 箭头代表横场。

确定性时, 所用的方法是锐角方法 (Wang *et al.*, 1994; Wang, 1997; Wang *et al.*, 2001; Metcalf *et al.*, 2006)。这种方法是通过比较纵场在势场外推下得到的横场的方向与光球观测的横场的可能方向来确定横场的方向。具体就是要求最终横场方向与势场外推的横场方向之间的夹角小于或者等于 90° 。

图 4.1A 是 SP/*Hinode* 于 2007 年 4 月 16 00:23 - 01:48 观测到的宁静区的纵向磁场。图 4.1B 是这个工作中用到宁静区光球矢量磁图, 其对应于图 4.1A 中用白色线框标记出来的区域。这个工作中用到的矢量磁场为 $100 \times 100 \text{ pixel}^2$, 其分辨率 X 方向为 $-5.2''$; Y 方向为 $7.3''$ 。磁场外推的高度定为 50 pixel, 其在 Z 方向的分辨率是 $0.148''$ 。值得一提的是: 所选择的宁静区就在日面中心附近 (在日面坐标下, 距离日心的距离是: X 方向 $-5.2''$, Y 方向 $7.3''$), 所以不必考虑投影效应。

4.2.2 磁场外推方法

这部分工作, 我们用到了一种势场外推方法 (Seehafer, 1978, 取 $\alpha = 0$ 就是势场近似) 和三种非线性无力场外推 (优化方法, 边界积分方法, 近似向上积分方法) 来研究宁静区空间磁场。势场外推方法见第一章 (1.2.2.3) Seehafer

方法。同第3.1章优化方法为 Wiegmann 于 2004 年改进的积分方法, 参见第一章 (1.2.3.5) 优化方法的介绍; 边界积分方法, 近似向上积分方法具体理论和算法同样参考第一章 (1.2.3.6) 中的边界积分方法以及第一章 (1.2.3.7) 中的近似向上积分方法。在本章中相应结果和图中的标记规定如下: Pot. 为势场, Opt. 为优化外推场, BIE 为边界积分外推场, AVI 为近似向上积分外推场。

4.3 结果与讨论

4.3.1 无力条件检验

一般认为宁静区的光球磁场本身是偏离无力场的, 所以应该首先检查一下这个工作中所选择的宁静区光球磁场满足无力场的程度。参照 Metcalf *et al.* (1995) 和 Moon *et al.* (2002), 我们用三个参数 F_x/F_p , F_y/F_p , F_z/F_p 来检验此宁静区光球磁场满足无力场的程度, F_x , F_y , F_z , F_p , 定义如下:

$$F_x = -\frac{1}{4\pi} \int B_x B_z dx dy, \quad (4.1)$$

$$F_y = -\frac{1}{4\pi} \int B_y B_z dx dy, \quad (4.2)$$

$$F_z = \frac{1}{8\pi} \int (B_z^2 - B_x^2 - B_y^2) dx dy, \quad (4.3)$$

$$F_p = \frac{1}{8\pi} \int (B_z^2 + B_x^2 + B_y^2) dx dy, \quad (4.4)$$

在方程 (4.1-4.4) 中, F_x , F_y , F_z , 其实就是洛伦兹力的分量, 而 F_p 则表示总的洛伦兹力的强度。对于这个工作中用到的宁静区光球磁场 (图 4.1 B), 其 F_x/F_p , F_y/F_p , F_z/F_p 分别是 0.03, -0.01, -0.35。Metcalf *et al.* 认为光球磁场的 F_z/F_p 的幅度为 ~ 0.1 是可以视为无力场。Moon *et al.*, (2002) 研究了 12 幅光球磁图, 得到 F_z/F_p 的幅度介于 0.06 与 0.32 之间, 平均值为 0.13, 他们得到的结论是: 光球磁场并不是偏离无力场太远。虽然我们研究的这个宁静区的 F_z/F_p 比 Moon *et al.*, (2002) 研究的 12 幅光球磁图大一些, 我们仍然尝试着应用无力场外推来研究该宁静区的磁场性质与结构。

4.3.2 外推场性质检验

因为外推的磁场应该是无力场方程的近似解, 所以外推场的无力程度与无散程度应该首先被检验。参照 Wheatland (2000) 的文章, 这里也用 σ_J (定义式

表 4.1: 四种外推场的 σ_J , $\langle |f_i| \rangle$, F_{max} 与 ϵ 数值。

Method	σ_J (Rad)	$\langle f_i \rangle$ 1×10^{-4}	F_{max} $(G^2 M^{-1}) \times 10^{-11}$	ϵ
Pot.	0.50	0.06	0.55	1.00
Opt.	0.97	0.23	1.21	1.98
BIE	0.92	1.01	0.92	2.01
AVI	0.89	2.93	0.45	2.81

4.5) 来检验无力场的无力程度:

$$\sigma_J = \frac{\sum_i J_i \sigma_i}{\sum_i J_i}, \quad (4.5)$$

其中

$$\sigma_i = \sin \theta_i = \frac{|\mathbf{J} \times \mathbf{B}|_i}{J_i B_i}, \quad (4.6)$$

用 f_i 定义式 (4.7) 来检验无力场的无散程度。

$$f_i = \frac{\int_{\Delta S_i} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}}{\int_{\Delta S_i} |\mathbf{B}| d\mathbf{S}} \approx \frac{(\nabla \cdot \mathbf{B})_i \Delta \mathbf{V}_i}{B_i A_i}. \quad (4.7)$$

实际上, σ_J 表示的是: 磁场与电流夹角的正弦值的权重平均。而 f_i 幅度的平均值表示的是: 此系统是否趋近于无散。式 (4.7) 中 $\Delta \mathbf{V}_i$ 为体积元, A_i 为体积元 ($\Delta \mathbf{V}_i$) 的表面积。如果外推场能完全满足无力无散的条件, σ_J 与 $\langle |f_i| \rangle$ 的数值应该为零。

表格 4.1 列出了四种外推场的 σ_J , $\langle |f_i| \rangle$ 的数值。同时也列出了每个外推场中的最大的洛伦兹力 ($F_{max} = \max(|\mathbf{J}_i \times \mathbf{B}_i|)$, $\mathbf{J}_i = \nabla \times \mathbf{B}_i$) 以及计算体积内每种非线性无力场的磁能与势场磁能的比值 ($\epsilon = E_{NLFF}/E_{pote}$)。在表格中可以看出, 四种无力场基本能够满足无力无散的条件, 并且几个参数的幅度基本一致。其中, 势场近似外推场最能符合无力无散条件, 因为在 Pot. 场中 σ_J , $\langle |f_i| \rangle$ 的数值都是最小的, 数值分别为 0.5 (Rad) 和 0.06×10^{-4} , 而非线性外推场中 σ_J 最小的数值是 0.89 (Rad), $\langle |f_i| \rangle$ 最小的数值为 0.23×10^{-4} 。对于非线性无力场, Opt. 场的无散条件满足的最好, 其 $\langle |f_i| \rangle$ 在三种非线性无力场中最小, 数值为 0.23×10^{-4} 。AVI 场最好地满足无力条件, 这个可以在 σ_J 与 F_{max} 一致地

看出来, 其数值分别为 0.89 (Rad) 和 $0.45 \times 10^{-11} (G^2 M^{-1})$ 。Opt., BIE 和 AVI 非线性外推场的 ε 分别为 1.98, 2.10, 和 2.81, 这个可以说明是外推的非线性无力场有着很高的非势性, 因为它们的 ε 明显地偏离 1。

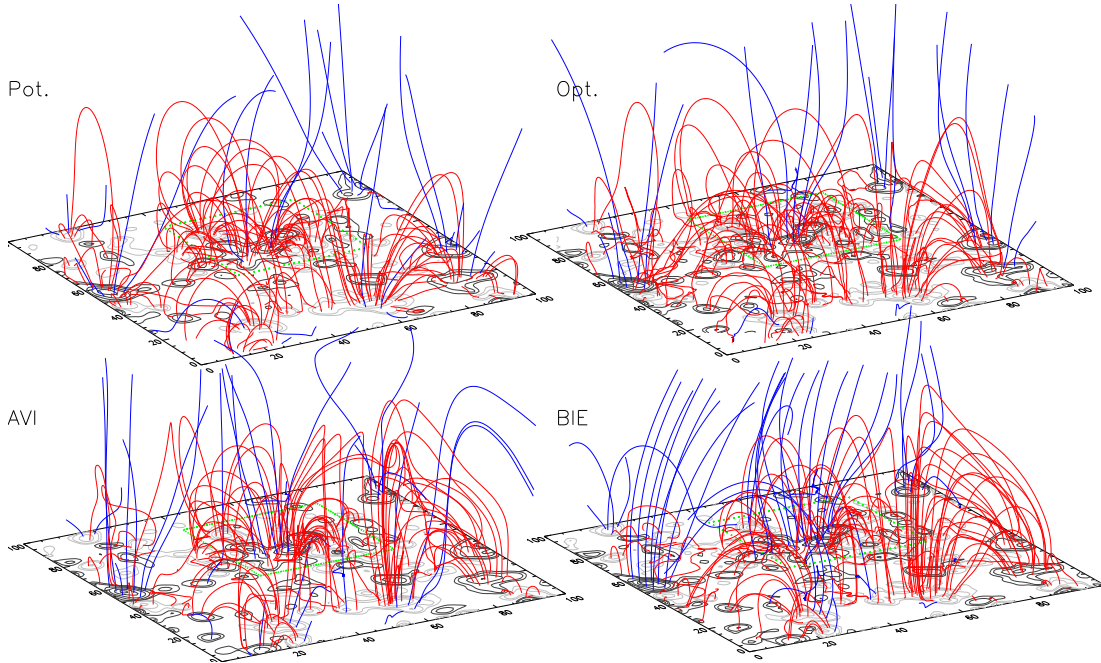


图 4.2: 四种外推无力场在整个计算体积内的磁力线分布。

表 4.2: 三种非线性无力场在不同高度处 $|B_{NLFF} - B_P|$ 的平均值。

Method	$ B_{NLFF} - B_P $ (G)				
	Height (km)				
	$z = 0$	$z = 1090$	$z = 2180$	$z = 3270$	$z = 4360$
Opt.	4.6713	0.0591	0.0091	0.0007	0.0001
BIE	4.6713	0.5490	0.0748	0.1544	0.1628
AVI	4.6713	0.5226	0.1068	0.0895	0.1162

4.3.3 外推场比较

图 4.2 画出了这四种外推场的磁力线的分布, 红线代表封闭的磁力线, 蓝色的代表开放的磁力线 (其中开放磁力线指的是能够穿出这个计算体积顶面和

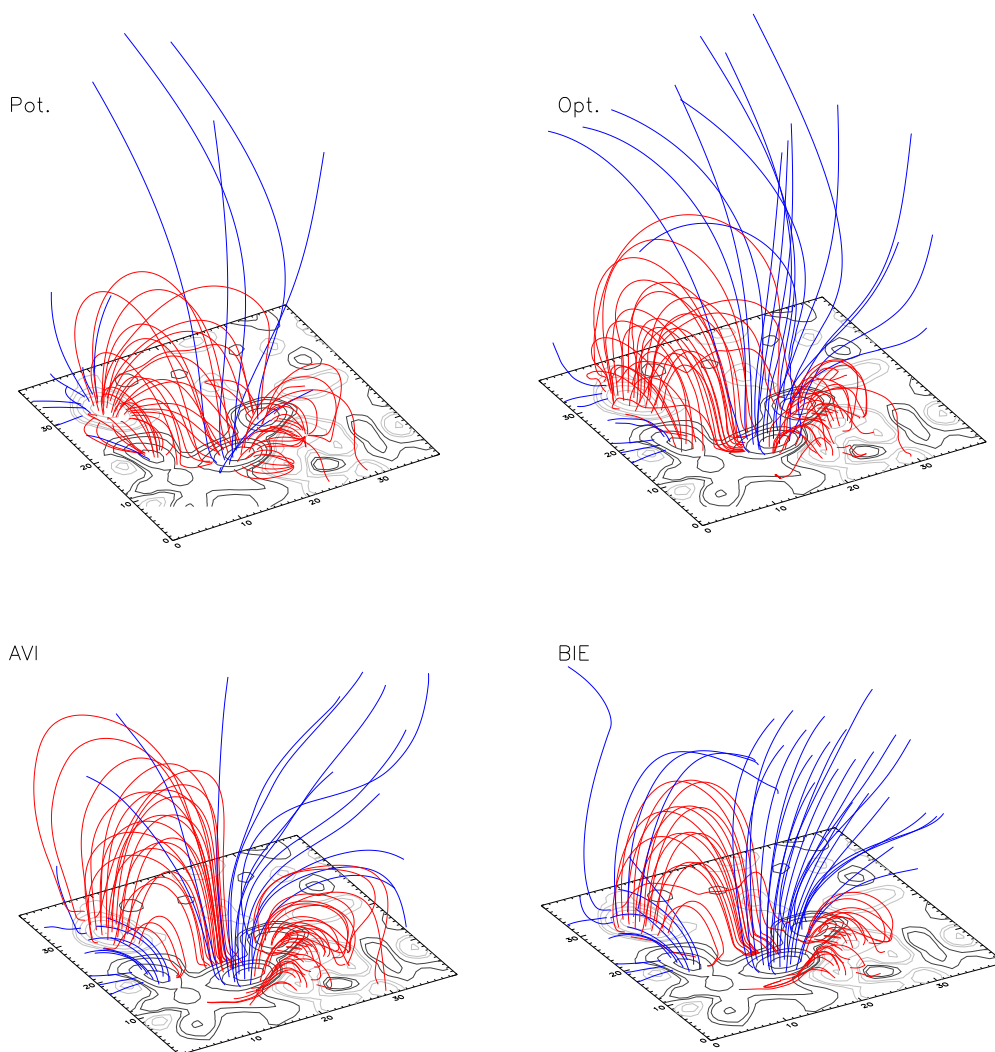


图 4.3: 四种外推无力场在局部区内的磁力线分布。此局部区域为图 4.2 绿色的线框中标出的区域。

侧面的那些磁力线)。从整体上看, 这些无力场的磁力线的拓扑结构都比较相似, 但是可以看出相比于势场, 非线性无力场的开放磁力线更多一些, 经计算在 Pot. 场, Opt. 场, AVI 场, BIE 场中开放磁力线数目占总磁力线数目的百分比分别是 9.2%, 11.5%, 12.9%, 14.6%。为了更加清楚地看外推场的磁力线分布并尽量看出不同外推场磁力线分布的区别, 在图 4.2 中, 我们选了一小部分(绿色线框的区域)来比较不同外推场的磁力线分布, 各种外推场磁力线在该部分

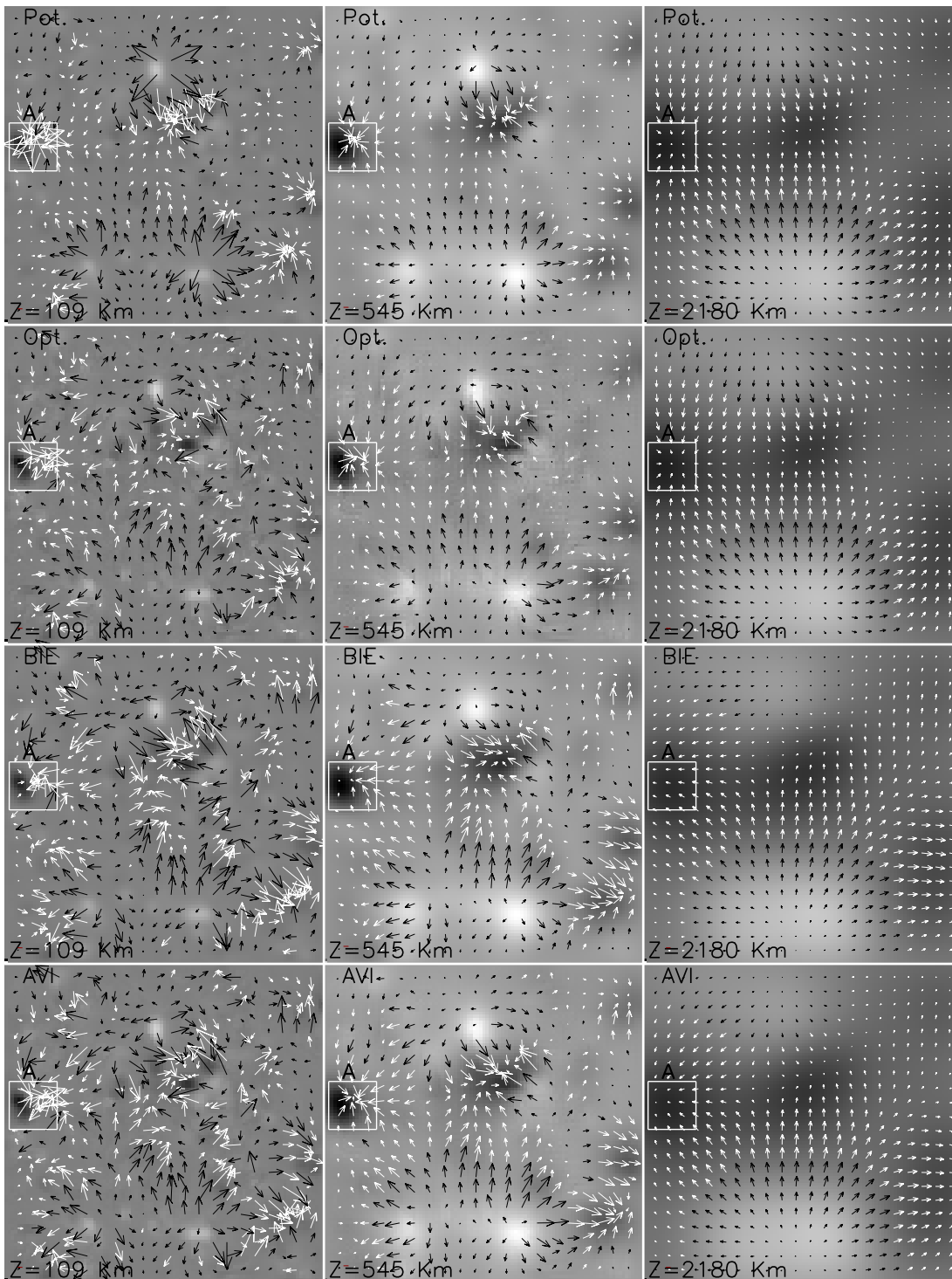


图 4.4: 不同高度处 ($z = 109, 545$ 和 2180 km) 四种外推场的矢量磁图, 灰度图表示纵向磁场分量, 箭头的大小和方向分别表示横场的强度和方向。行: 1, 2, 3, 4, 对应于 Opt., BIE, AVI 外推场。列: 1, 2, 3, 表示不同的高度。

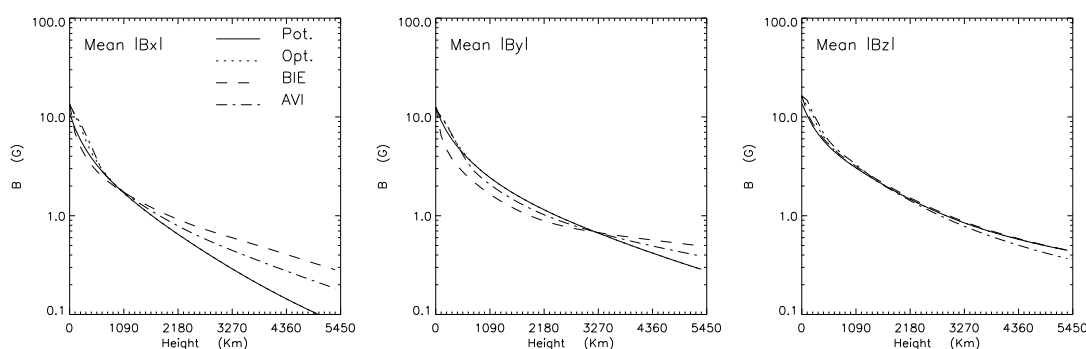


图 4.5: 外推场磁场分量 B_x , B_y , B_z , 的绝对强度的平均值随着高度的变化, 不同类型的曲线代表不同的外推磁场

的分布在图 4.3 中给出。从图 4.3 中可以看出：一、外推场的开放磁力线基本都源于光球表面强磁场的区域；二、并且非线性无力场的封闭磁力线表现的更加竖直，这一点可以通过光球表面的磁场倾角 (48.68°) 与对应是势场光球表面的倾角 (41.30°) 来说明，相对于从光球表面的起点开始非线性外推场的磁力线就比势场的磁力线更加竖直；三、部分非线性无力场的封闭磁力线能够比势场的封闭磁力线延伸的更高。从图 4.3 我们可以更加清楚地看出 BIE 和 AVI 外推场的磁力线分布很相似，尤其是对于那些分布于低层次封闭的磁力线。

在图 4.4 给出了三个不同高度处 ($z = 109, 545$ 和 2180 km) 各种不同外推场的矢量磁图，灰度图表示纵向磁场分量 (白色区域代表正极，黑色代表负极)，箭头的大小和方向分别表示横场的强度和方向。从图 4.4 可以直接的看出磁场随高度的扩散情况。整体上看，各种外推场的纵向磁场比较相似，并且随着高度的变化各种外推场纵向磁场分量的扩散截面也基本一致。另一方面，外推场的横场存在明显的区别，尤其是横场的方向。例如对于 BIE 与 AVI 外推场，随着高度的增加其横场的箭头能够穿过比较强的纵向磁场的区域 (如标记在第 3 行的 A 区域)。尽管在 BIE 与 AVI 场中存在着比较精细的差别，它们的横场还是存在着很大的相似度。对于 Pot. 和 Opt. 外推场，其横场箭头总是有如下规律：横场箭头在负极是汇聚的，在正极是发散的，这种规律是符合势场模型的。

在图 4.5 给出了外推磁场绝对强度的平均值随着同高度变化的趋势，其中磁场绝对强度的平均值是通过某一高度处一水平截面上磁场计算来得到，亦即反映了磁场强度随高度的变化。横坐标是高度单位为千米 (km)，纵坐标 (Log 坐标) 是磁场强度单位为高斯从图中可以看出，Opt. 场的磁场强度随高度的增

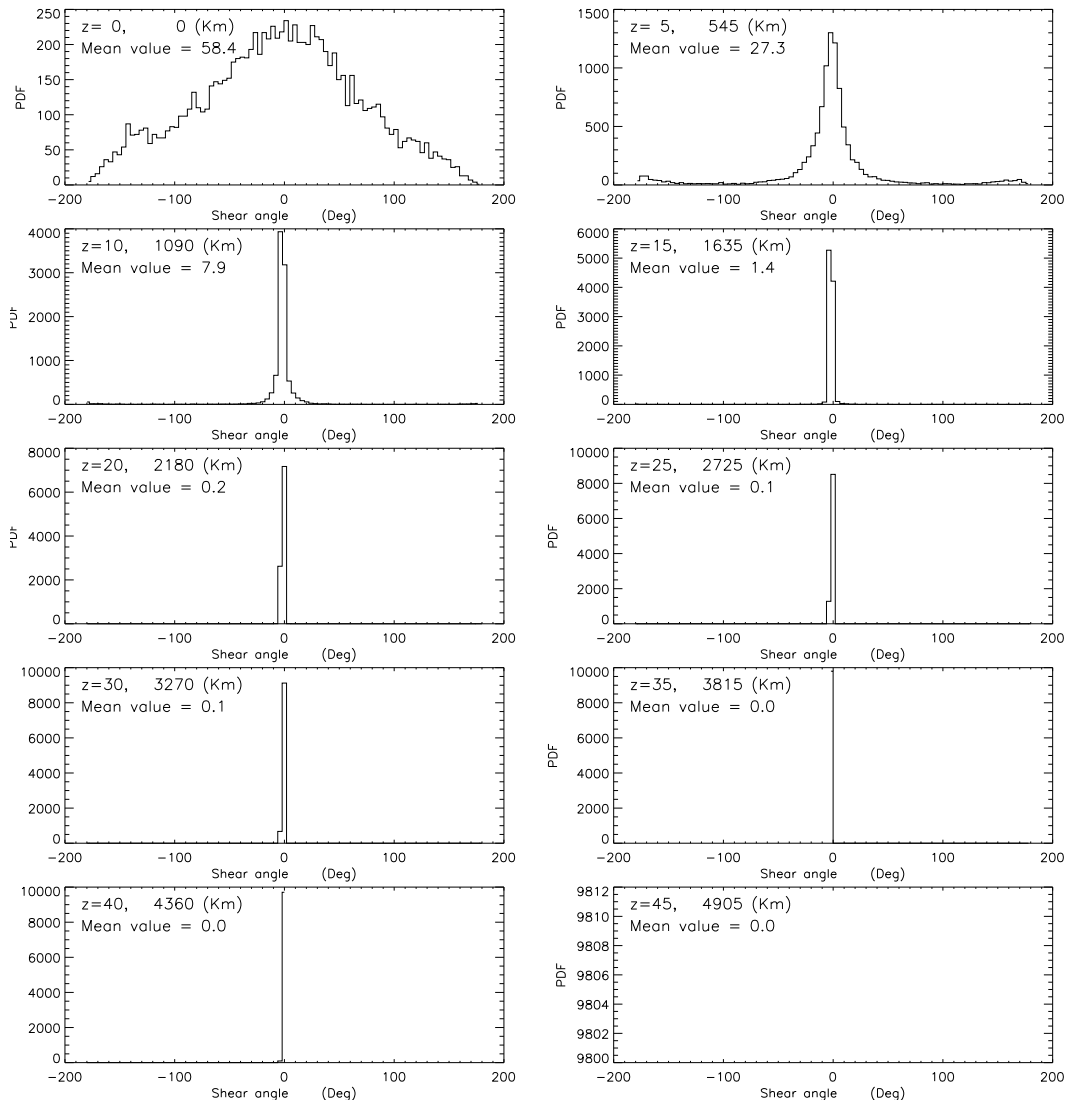


图 4.6: 不同高度层次 ($z = 0, 545, 1090 \dots 4905$ km) Opt. 外推场剪切角的概率分布函数 (pdf), 在图中标记出了此高度水平截面上剪切角的绝对值的平均值。

加特别明显地趋近于势场强度。整体上看, 这些曲线的轮廓是十分相似的, 随着高度的增加它们的强度趋于相同。从图中看到, BIE 外推场的 B_x 与 B_y 的强度在低层次小于相应的势场的分量, 但随着高度的增加 BIE 外推场的 B_x 与 B_y 的强度开始反超相应的势场的分量 (其中, B_x 分量在高度为 ~ 1000 km 处超过对应的势场值, 而 B_y 分量在高度为 ~ 3000 km 处超过对应的势场值)。图 4.5 中, 各种外推场的 B_z 分量曲线的轮廓特别的相似, 意味着各种外推场纵向磁场在

强度上非常一致，这也与图 4.4 的结果是符合的（外推场的纵向磁场比较相似，并且随着高度的变化各种外推场纵向磁场分量的扩散截面也基本一致）。图 4.5 的另一个规律就是磁场强度在高度低于 ~ 1000 km 迅速降低；而当高度超过 ~ 1000 km，磁场的降低的速度明显减慢。为了进一步比较非线性无力场的磁场强度 (B_{NLFF}) 与势场的磁场强度 (B_P) 的差别，对应不同高度处 $|B_{NLFF} - B_P|$ 的平均值在表格 4.2 给出。 B_{NLFF} 与 B_P 分别为不同高度处水平截面某一点的磁场的总强度 ($\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$)。从图 4.2 看出：随着高度的增加，非线性无力场的磁场强度与势场的磁场强度的差别减小；在光球层非线性无力场的磁场强度与势场的磁场强度的差别在 5 高斯的量级，当高度为 $z = 2000$ km 其量级降到 0.1 高斯。而当高度为 $z = 4000$ km 其差别基本上趋于零。

为了比较非线性无力场与势场的方位角 (ϕ) 的差别。图 4.6, 4.7, 4.8 分别给出 Opt., BIE, AVI 外推场在高度 $z = 0, 545, 1090 \dots 4905$ km 处，水平截面上剪切角的概率密度函数 (pdf) 的分布，其中剪切角的定义是：非线性无力场与势场之间方位角差。从图 4.6 看出，Opt. 场剪切角 pdf 曲线轮廓在零值左右呈现出对称分布，此种分布规律随高度的增加没有变化，但是随高度的增加剪切角的数值更加向零值集中，所以导致剪切角数值大小随高度锐减，其平均值（某一水平界面上绝对剪切角的平均值）从在光球上 $z = 0$ 的 58° 减小到当高度 $z > 4000$ km 时的 0° 。从图 4.7 看出，其 pdf 曲线在零值处有一种集中的趋势，所以其平均值本应该有减小的可能，但是其 pdf 曲线在一些非零处，甚至一些绝对数值比较大处也有集中（如，低层在 -170° 附近，随高度增加在 70° 附近）。所以导致其平均值没有能够明显地减小，其平均值在高度低于 $z = 2725$ km 时有随高度增加的趋势，当高度超过 $z = 2725$ km 时反而有随高度增加减小的趋势。从图 4.8 看出，AVI 外推场的剪切角 pdf 分布曲线没有特别的规律，随高度增加向零值集中的趋势没有 Opt., BIE 场明显，而是一个相对比较宽的分布。从图中看出，当高度超过 $z = 2180$ km 时，pdf 分布曲线的形状几乎没有变化。经过计算可以得到，AVI 外推场的剪切角数值随高度增加略有增加，在高度 $z = 4905$ 处，其平均值到达了 72° 。

图 4.9 给出了不同高度 $z = 0, 109, 545, 1090$ km 处非线性无力场剪切角的分布情况，图中用等高线 (contour) 线 ($\pm 60^\circ, 80^\circ, 100^\circ$) 代表剪切角分布，并将剪切角分布叠加于相应的纵向磁图上来研究剪切角分布规律，其中红/蓝等高线分别表示正/负剪切角值。图中可以看出，尽管不同非线性外推场每一层次上的剪切角的平均值不同，但是不同外推场的剪切角分布仍然存在着明显的相

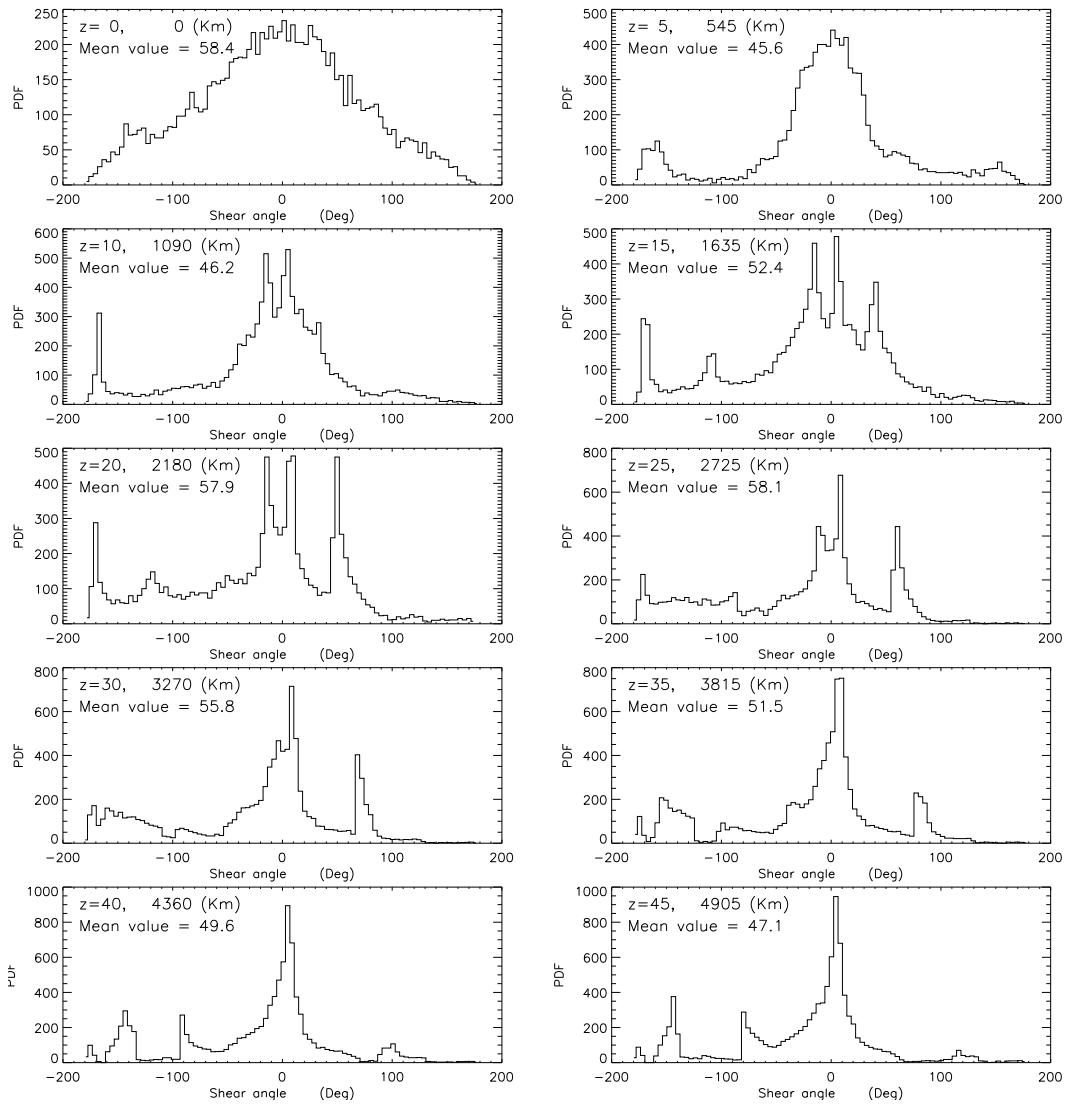


图 4.7: 同图 4.6, BIE 外推场的结果。

似之处, 尤其是在 BIE 与 AVI 外推场的低层。同时可以看出的是: 大的剪切角比较多地分布在强纵向磁场的边界附近, 并且光球层存在明显的非势性, 因为在光球层存在更加明显的剪切角。

4.3.4 讨论

虽然有许多理论模型被提出来描述太阳宁静区色球及日冕的磁场, 但是目前对太阳宁静区色球及日冕的真实磁场仍然不能清楚地了解。磁场外推是一种

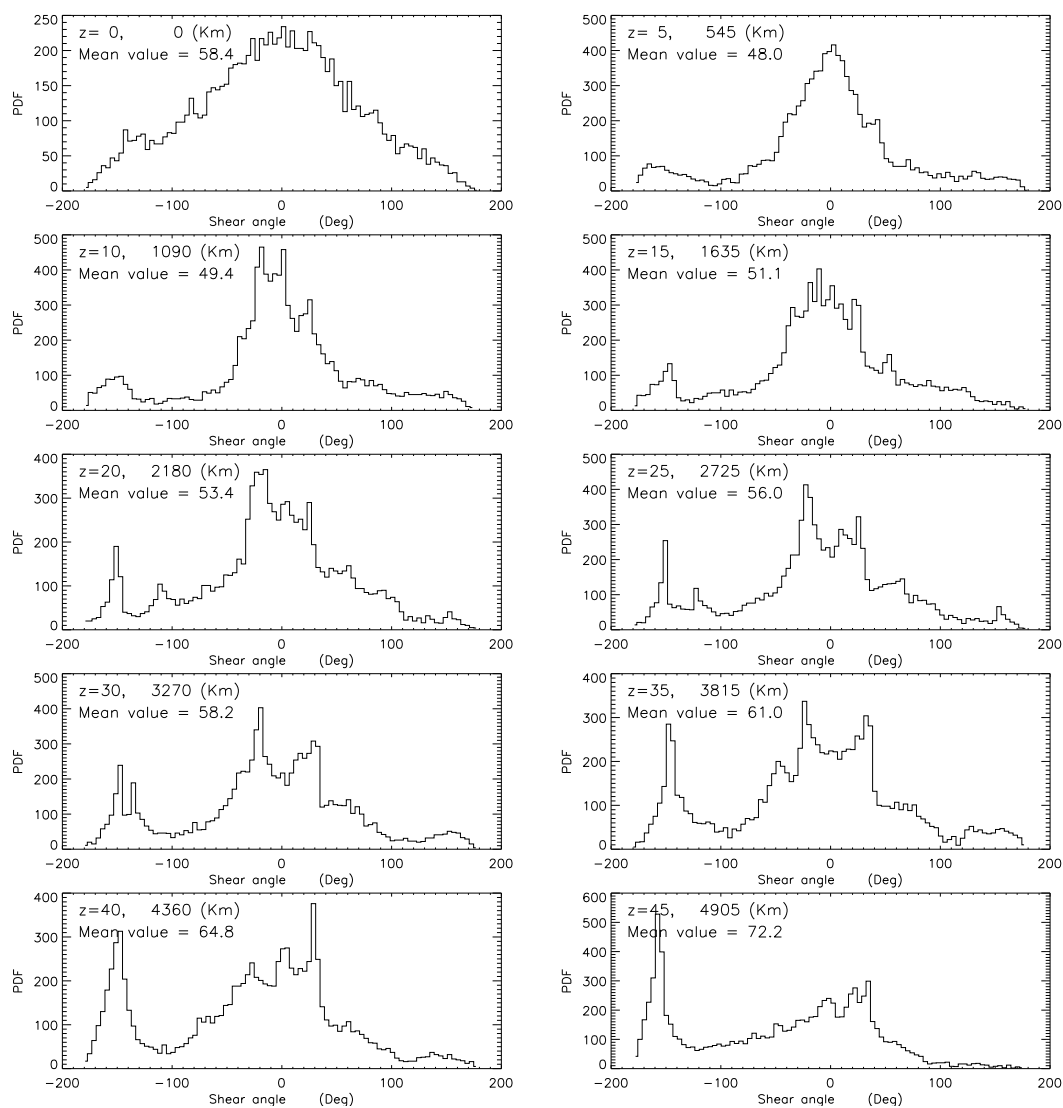


图 4.8: 同图 4.6, AVI 外推场的结果。

研究空间磁场的工具，但是将其应用到太阳的宁静区仍然有一定的局限。

目前利用磁场外推研究活动区取得了比较大的成功，其中主要基于两方面的考虑：第一，需要外推出磁场本身基本满足无力场假设；第二，太阳活动区集中着大部分磁通，所以与活动区相对应的大尺度日冕可以看作为无力场。然而，将磁场外推应用于太阳宁静区情况就有所不同。首先，在宁静区无力场假设不一定完全符合，因为在宁静区等离子体的 β 值不能满足足够的小；再有，宁静区的磁通不像活动区那么集中，宁静区磁通集中的尺度基本上接近于目前观测

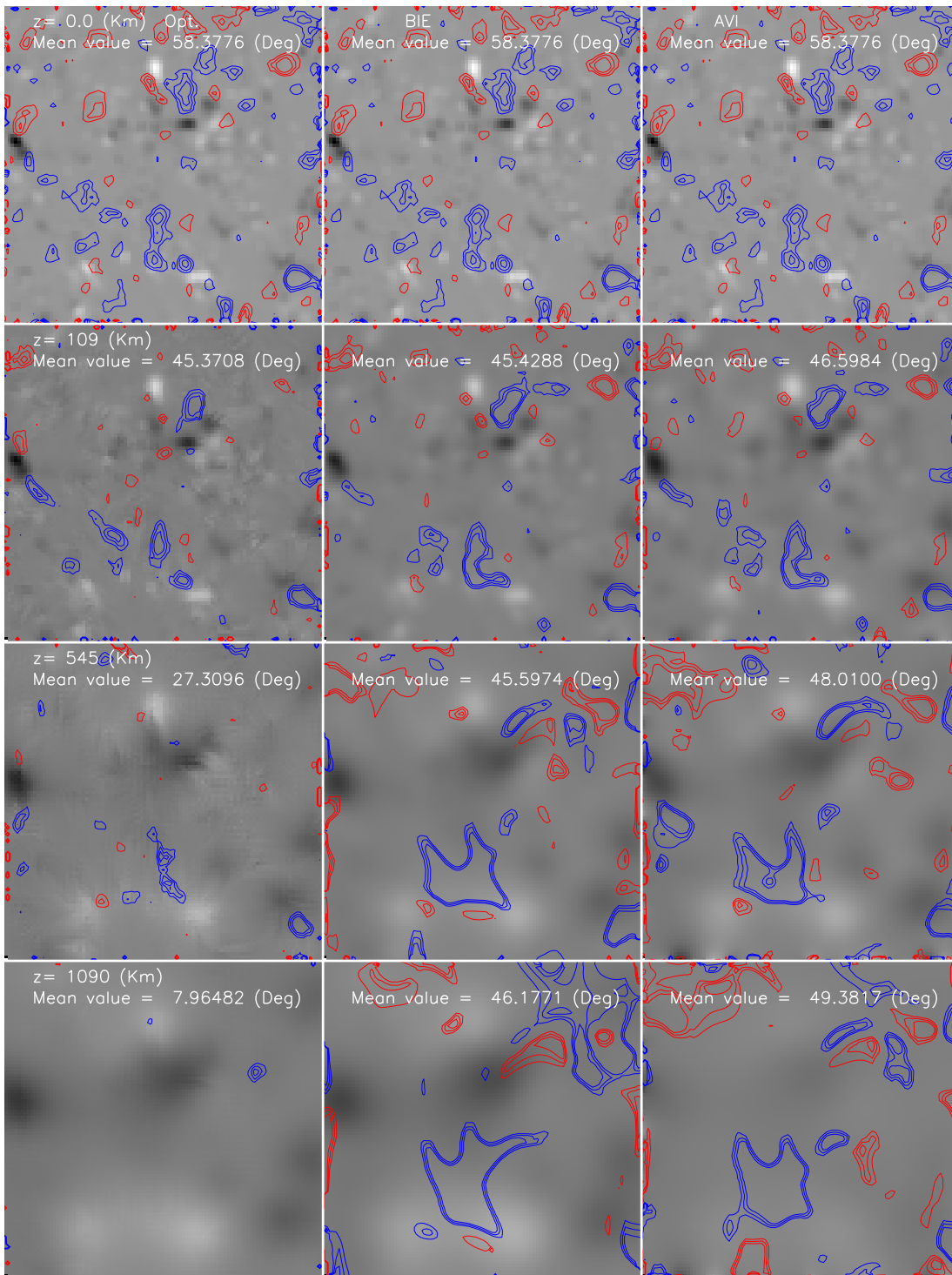


图 4.9: 高度 $z = 0, 109, 545, 1090$ km 处不同非线性外推场的剪切角的分布 (等高线表示) 叠加在相应的纵向磁图 (灰度图) 上, 其中等高线为 $\pm 60^\circ, 80^\circ, 100^\circ$ 红/蓝等高线分别表示正/负值。列: 1, 2, 3 对应 Opt., BIE, AVI 外推场。行: 1, 2, 3, 4 代表高度 $z = 0, 109, 218, 327$ km。同图 4.6, 在图中标记出了此高度水平截面上剪切角的绝对值的平均值。

的空间分辨率,甚至更小。

尽管如此,最近研究人员发现在宁静区存在千高斯的磁场(如, Stenflo, 1973; Wijn, 2009)。所以太阳宁静区局部等离子体可以满足 $\beta < 1$, 因而无力场假设可以局部的近似的满足。当然,关于宁静区磁场是否能满足无力假设仍然需要继续仔细研究。最近也有一些工作假设宁静区磁场满足无力假设,利用势场近似或线性无力场外推来研究宁静区磁场性质(如, Tu *et al.*, 2005; Régnier *et al.*, 2008; Zhao *et al.*, 2009)。在本章工作,我们也首先假设宁静区满足了无力场假设,进而尝试利用非线性无力场外推来研究宁静区磁场性质。

4.4 本章结论

本部分工作以 SP/*Hinode* 观测到的宁静区为边界条件利用无力场外推来研究太阳宁静区空间磁场的性质。外推所研究的高度限制在光球以上 ~ 5000 km 以下。四种磁场外推方法被应用在这部分研究工作中,其中一种是势场近似,并对不同外推磁场进行了详细的比较。

为了描述宁静区非线性外推场与势场的差别,这里主要比较了两者在强度与方位角上的不同(即,剪切角)。发现磁场强度随高度的增加而明显的减小,并且各种外推场随高度减小幅度基本一致。当高度超过光球以上 2000 km 时,各种外推场强度上几乎没有差别,其差别的量级仅为 0.1 高斯。

对于剪切角,发现光球表面有明显的非势性,其光球层的剪切角的平均值到达 58° 。随着高度的增加,不同非线性外推场的剪切角表现出不同的变化趋势: Opt. 外推场剪切角随高度的增加明显而快速地减小; BIE 外推场剪切角随高度先略有增加而后又略有减小; AVI 外推场剪切角随高度的增加缓慢地增加;总体上 BIE 与 AVI 外推场的剪切角随高度增加没有明显的变化趋势,两种外推场的剪切角的 pdf 曲线轮廓随高度也没有明显的变化。

第五章 总结与展望

5.1 总结

本文主要研究太阳磁场外推方法的性能及其应用，磁场外推方法涉及到势场近似和非线性无力场外推。利用解析场来研究非线性外推场方法的有效性、适用性以及外推场误差。利用势场近似和非线性无力场外推研究太阳宁静区空间磁场性质，并比较不同外推场的差异等。

通过解析场与外推场的比较，可以认为边界积分和近似向上积分外推方法在低层次（高度为 15 % 底面的尺度）能够给出比较合理的结果，尽管存在着一定的偏差。通过无力场中无力因子 α 的研究，可以看出外推场与解析场中的 α 存在着明显的差异，并且同一条磁力线上的 α 也存在着比较大的偏差，所以对应用磁场外推定量地研究对空间磁场给予了一定的限制。

通过利用磁场外推对宁静区空间磁场的研究发现：不同外推场的磁场强度及其扩散趋势基本相同；剪切角随高度的变化各异；剪切角在同一水平高度平面上的分布相似；总体上非线性外推场磁力线更加竖直进而延伸的也更高；宁静区光球磁场存在明显的非势性。

5.2 展望

利用太阳磁场外推方法研究活动区的空间磁场性质，研究空间磁场与太阳爆发之间的联系。利用外推的空间磁场计算磁场的一些非势参数如：自由能、空间剪切角、磁场螺度等，进而研究这些非势参数与太阳爆发的联系。利用最新的地面或者空间高质量太阳全球磁场数据进行全球的磁场外推，研究大尺度太阳磁场磁力线的空间分布。

附录 A

A.1 优化方法的理论推导

优化方法理论公式 (1.61) 的推导过程, 首先令:

$$\Omega = \mathbf{B}^{-2}[(\nabla \times \mathbf{B} \times \mathbf{B} - (\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{B})], \quad (\text{A.1})$$

则公式 (1.60) 可以表达为:

$$L = \int_V \mathbf{B}^2 \Omega^2 dV, \quad (\text{A.2})$$

对 t 求导数得:

$$\frac{1}{2} \frac{dL}{dt} = \int_V \left\{ \Omega \cdot \frac{\partial}{\partial t} [(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - (\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{B}] - \Omega^2 \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right\} dV. \quad (\text{A.3})$$

期望的目标是将式 (A.3) 表示成含有 $\partial \mathbf{B} / \partial t$ 的积分形式, 所以将式 (A.3) 右端的第一项展开:

$$H = \int_V \Omega \cdot \left[(\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}) \times \mathbf{B} + (\nabla \times \mathbf{B}) \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - (\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t})\mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{B} \right] dV. \quad (\text{A.4})$$

式 (A.4) 的第一项可写为:

$$\begin{aligned} H_1 &= \int_V \Omega \cdot \left[(\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}) \times \mathbf{B} \right] dV \\ &= \int_V (\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}) \cdot (\mathbf{B} \times \Omega) dV \\ &= \int_V \left\{ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot [\nabla \times (\mathbf{B} \times \Omega)] - \nabla \cdot [(\mathbf{B} \times \Omega) \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}] \right\} dV, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

对其中第二项应用高斯定理得:

$$\begin{aligned} H_1 &= \int_V \left\{ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot [\nabla \times (\mathbf{B} \times \Omega)] \right\} dV + \int_S \hat{n} \cdot [(\mathbf{B} \times \Omega) \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}] dS \\ H_1 &= \int_V \left\{ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot [\nabla \times (\mathbf{B} \times \Omega)] \right\} dV + \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot [\hat{n} \times (\mathbf{B} \times \Omega)] dS \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

其中, \hat{n} 是包围体积 V 边界的法向单位矢量。

式 (A.4) 的第二项可写为:

$$\begin{aligned} H_2 &= \int_V \Omega \cdot [(\nabla \times \mathbf{B}) \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}] dV \\ &= \int_V \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot [\Omega \times (\nabla \times \mathbf{B})] dV. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

应用矢量计算规则和高斯定理式 (A.4) 的第三项可写为:

$$\begin{aligned} H_3 &= - \int_V (\Omega \cdot \mathbf{B}) \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dV \\ &= - \int_V \{ \nabla \cdot [(\Omega \cdot \mathbf{B}) \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}] - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \nabla (\Omega \cdot \mathbf{B}) \} dV \\ &= \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} (\Omega \cdot \mathbf{B}) dS + \int_V \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \nabla (\Omega \cdot \mathbf{B}) dV \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

有了式 (A.4), (A.3), (A.6), (A.7), (A.8) 可以得到:

$$\frac{1}{2} \frac{dL}{dt} = - \int_V \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{F} dV - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{G} dS, \quad (\text{A.9})$$

其中,

$$\mathbf{F} = \nabla \times (\Omega \times \mathbf{B}) - \Omega \times (\nabla \times \mathbf{B}) - \nabla (\Omega \cdot \mathbf{B}) + \Omega (\nabla \cdot \mathbf{B}) + \Omega^2 \mathbf{B}, \quad (\text{A.10})$$

$$\mathbf{G} = \hat{n} \times (\Omega \times \mathbf{B}) - \hat{n} (\Omega \cdot \mathbf{B}), \quad (\text{A.11})$$

方程 (A.9) 表明如果 \mathbf{B} 按如下公式 (A.12) 演化 L 将逐渐减小。

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mu \mathbf{F}, \quad (\text{A.12})$$

假定在边界上有:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \quad (\text{A.13})$$

则最后可以得到式 (1.61), 也就是下面得式子:

$$\frac{dL}{dt} = -2 \int_V \mu F^2 dV. \quad (\text{A.14})$$

A.2 近似向上积分方法的解

方程 (1.80) 的零阶解:

当 F_1, F_2 和 F_3 完全地依赖于 (x, y) , 并且六个偏导数 $\partial F_1/\partial_{xy}, \partial F_2/\partial_{xy}, \partial F_3/\partial_{xy}$ 仅仅是 (x, y) 情况下, 方程 (1.80) 简化为常系数可解的偏微分方程 (A.15), 其解就称为零阶解。

$$\begin{aligned}
\frac{d\xi_1}{dz} F_1(x_i, y_j, 0) &= \xi_3 \frac{\partial F_3(x_i, y_j, 0)}{\partial x} + \alpha(x_i, y_j, 0) \xi_2 F_2(x_i, y_j, 0), \\
\frac{d\xi_2}{dz} F_2(x_i, y_j, 0z) &= \xi_3 \frac{\partial F_3(x_i, y_j, z)}{\partial y} - \alpha(x_i, y_j, 0) \xi_1 F_1(x_i, y_j, z), \\
\frac{d\xi_3}{dz} F_3(x_i, y_j, 0) &= -\xi_1 \frac{\partial F_1(x_i, y_j, 0)}{\partial x} - \xi_2 \frac{\partial F_2(x_i, y_j, 0)}{\partial y}, \\
\alpha(x_i, y_j, 0) \xi_3 F_3(x_i, y_j, 0) &= \xi_2 \frac{\partial F_2(x_i, y_j, 0)}{\partial x} - \xi_1 \frac{\partial F_1(x_i, y_j, 0)}{\partial y}, \\
0 &\leq z \leq \Delta z
\end{aligned} \tag{A.15}$$

因为 $\alpha(x_i, y_j, 0)$ 以及 $F_3(x_i, y_j, 0)/\partial x$ 等都可以由光球求得, 为已知量, 所以可以比较容易的得到线性常微分方程 (A.15) 的解析解。

方程 (1.80) 的一阶解:

考虑到在 $z = \Delta z$ 处磁场的结构变化不大, 并且六个偏导数 $\partial F_1/\partial x, \dots, \partial F_3/\partial y$ 比较弱地依赖于 z 。将 $F_1(x_i, y_i, 0), F_2(x_i, y_i, 0)$ 和 $F_3(x_i, y_i, 0)$ 乘以零阶解得到的 ξ_1, ξ_2 和 ξ_3 , 便得到在 $z = \Delta z$ 处磁场 (可认为是零阶解), 然后再重新计算 $\partial F_1/\partial x, \dots, \partial F_3/\partial y, \alpha$, 得到这些量的一阶近似:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_3^{(1)}(x_i, y_j, z)}{\partial x} &= \frac{\partial F_3(x_i, y_j, 0)}{\partial x} + (z)(\Delta z)^{-1} \left[\frac{\partial F_3^{(1)}(x_i, y_j, \Delta z)}{\partial x} - \frac{\partial F_3(x_i, y_j, 0)}{\partial x} \right], \\
\alpha^{(1)}(x_i, y_j, z) &= \alpha(x_i, y_j, 0) + (z)(\Delta z)^{-1} [\alpha^{(1)}(x_i, y_j, \Delta z) - \alpha(x_i, y_j, 0)], \\
0 &\leq z \leq \Delta z
\end{aligned} \tag{A.16}$$

这里的 7 个量 $\partial F_3^{(1)}/x, \partial F_3^{(1)}/y, \partial F_2^{(1)}/x, \partial F_2^{(2)}/y, \partial F_1^{(1)}/x, \partial F_3^{(1)}/y, \alpha(1)$, 表达成为 z 的线性函数。对于 $\Delta z \ll \Delta x \Delta y$ 这种表达式是十分精确的, 于是我们

可以组建一阶偏微分方程如 (A.17) :

$$\begin{aligned}
\frac{d\xi_1}{dz} F_1(x_i, y_j, 0) &= \xi_3 \frac{\partial F_3^{(1)}(x_i, y_j, z)}{\partial x} + \alpha^{(1)}(x_i, y_j, z) \xi_2 F_2(x_i, y_j, 0), \\
\frac{d\xi_2}{dz} F_2(x_i, y_j, 0) &= \xi_3 \frac{\partial F_3^{(1)}(x_i, y_j, 0)}{\partial y} - \alpha^{(1)}(x_i, y_j, z) \xi_1 F_1(x_i, y_j, 0), \\
\frac{d\xi_3}{dz} F_3(x_i, y_j, 0) &= -\xi_1 \frac{\partial F_1^{(1)}(x_i, y_j, z)}{\partial x} - \xi_2 \frac{\partial F_2^{(1)}(x_i, y_j, z)}{\partial y}, \\
\alpha(x_i, y_j, 0) \xi_3 F_3(x_i, y_j, 0) &= \xi_2 \frac{\partial F_2^{(1)}(x_i, y_j, z)}{\partial x} - \xi_1 \frac{\partial F_1^{(1)}(x_i, y_j, z)}{\partial y}, \\
0 &\leq z \leq \Delta z
\end{aligned} \tag{A.17}$$

方程 (A.17) 表示的是变系数的偏微分方程, 不同的方法可以求解该方程。于是便可以得到 ξ_1 , ξ_2 和 ξ_3 的一阶解, 再分别乘以 F_1 , F_2 和 F_3 , 便得到在 $z = \Delta z$ 处磁场的一阶解。显然重复上边的操作可以得到二、三..., 高阶解。Song *et al.* (2006) 指出高阶解与零阶解的差别很小 (文中的表格 1), 所以在计算中只考虑零阶解就可以。

参考文献

- [1] Alissandrakis, C.E., 1981, *Astron. Astrophys.*, **100**, 197.
- [2] Almeida, J.S., 1997, *Astron. Astrophys.*, **324**, 763.
- [3] Aly, J.J., 1989, *Solar Phys.*, **120**, 19.
- [4] Aly, J.J., 1992, *Solar Phys.*, **138**, 133.
- [5] Amari, T., Aly, J.J., Luciani, J.F., Boulmezaoud, T.Z. and Mikic, Z., 1997, *Solar Phys.*, **174**, 129.
- [6] Amari, T., Boulmezaoud, T.Z. and Aly, J.J., 2006, *Astron. Astrophys.*, **446**, 691.
- [7] Amari, T., Boulmezaoud, T. Z. and Mikic, Z., 1999, *Astron. Astrophys.*, **350**, 1051.
- [8] Barnes, C.W. and Sturrock, P.A., 1972, *Astron. Astrophys.*, **174**, 659.
- [9] Chandrasekhar, S. and Kendall, P.C., 1957, *Astrophys. J.*, **126**, 457.
- [10] Chiu, Y. T. and Hilton, H. H., 1977, *Astrophys. J.*, **212**, 873.
- [11] Chodura, R. and Schlueter, A., 1981, *J. Comput. Phys.*, **41**, 68.
- [12] Cuperman, S., Bruma, C. and Heristchi, D., 1997, *Astron. Astrophys. Suppl.*, **122**, 381.
- [13] Cuperman, S., Ofman, L. and Semel, M., 1990, *Astron. Astrophys.*, **230**, 193.
- [14] Démoulin, P., Bagala, L. G., Mandrini, C. H., Henoux, J. C. and Rovira, M. G., 1997, *Astron. Astrophys.*, **325**, 305.

- [15] Démoulin, P., Cuperman, S. and Semel, M., 1992, *Astron. Astrophys.*, **236**, 351.
- [16] DeRosa, M.L., Schrijver, C.J., Barnes, G., Leka, K.D., Lites, B.W. and Aschwanden, M.J., *et al.*, 2009, *Astrophys. J.*, **696**, 1780.
- [17] DeRosa, M., Schrijver, C. J., Barnes, G., Leka, K. D., Lites, B. W., Aschwanden, M. J., Amari, T., Canou, A., McTiernan, J. M., Régnier, S., Thalmann, J. K., Valori, G., Wheatland, M. S., Wiegelmann, T., Cheung, C. M., Conlon, P. A., Fuhrmann, M., Inhester, B. and Tadesse, T., 2009, *Astrophys. J.*, **696**, 1780.
- [18] Dimitropoulou, M., Georgoulis, M., Isliker, H., Vlahos, L., Anastasiadis, A., Strintzi, D. and Moussas, X., 2009, *Astron. Astrophys.*, **505**, 1245.
- [19] Dowdy, J. F., Jr., Rabin, D. and Moore, R. L., 1986, *Solar Phys.*, **105**, 35.
- [20] Gabriel, A. H, 1976, *Phil. Trans. R. Soc. London*, **A281**, 339.
- [21] Gary, G.A., 1989, *Astrophys. J. Suppl.*, **69**, 323.
- [22] Giovanelli, R.G., 1980, *Solar Phys.*, **68**, 49.
- [23] Guo, Y., Ding, M. D., Jin, M. and Wiegelmann, T., 2009, *Astrophys. J.*, **696**, 1526.
- [24] Hannakam, L., Gary, G.A. and Teuber, D.L., 1984, *Solar Phys.*, **94**, 219.
- [25] Harvey, J. W., 2006a, *ASP Conference Series*, **358**, 419.
- [26] Harvey, J. W., 2006b, 26th IAU Joint Discussion, **3**, p.16-17.
- [27] He, H. and Wang, H.: 2008, *J. Geophys. Res.*, **113**, A05S90.
- [28] He, H., Wang, H. and Yan, Y.H, 2008, 37th COSPAR Scientific Assembly, p.1197.
- [29] He, H., Wang, H. and Yan, Y., 2011, *J. Geophys. Res.* **116**, A01101

- [30] Ichimoto, K., Lites, B., Elmore, D., Suematsu, Y., Tsuneta, S., Katsukawa, Y., Shimizu, T., Shine, R., Tarbell, T. and Title, A., 2008, *Solar Phys.*, **249**, 233.
- [31] Jing, J., Wiegmann, T., Suematsu, Y., Kubo, M. and Wang, H., 2008, *Astrophys. J.*, **676**, L81.
- [32] Kosugi, T., Matsuzaki, K., Sakao, T., Shimizu, T., Sone, Y., Tachikawa, S., Hashimoto, T., Minesugi, K., Ohnishi, A. and Yamada, T., 2007, *Solar Phys.*, **243**, 3.
- [33] Li, Z, Yan, Y.H. and Song, G., 2004, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **347**, 1255
- [34] Li, Z, Yan, Y.H. and Song, G., 2006, *Acta. Astron. Sinica.*, **47**, 1.
- [35] Lites, B. W., Rutten, R. J. and Berger, T. E., 1999, *Astrophys. J.*, **517**, 1013.
- [36] Low, B.C. and Lou, Y.Q., 1990, *Astrophys. J.*, **352**, 343
- [37] Metcalf, T. R., Leka, K. D., Barnes, G., Lites, B. W., Georgoulis, M. K., Pevtsov, A. A., Balasubramaniam, K. S., Gary, G. A., Jing, J. and Li, J., 2006, *Solar Phys.*, **237**, 267.
- [38] Metcalf, T.R., Jiao, L., McClymont, A. N., Canfield, R.C. and Uitenbroek, H., 1995, *Astrophys. J.*, **439**, 474.
- [39] Mikic, Z. and Schnack, D.D., 1990, *Astrophys. J.*, **430**, 898.
- [40] Mikic, Z. and McClymont, A. N., 1994, in Solar Active Region Evolution: Comparing Models with Observations, Vol68. ASP Conf. Ser., p.225.
- [41] Moon, Y.J., Choe, G. S., Yun, H. S., Park, Y. D. and Mickey, D. L., 2002, *Astrophys. J.*, **568**, 422.
- [42] Nakagawa, Y. and Raadu, M.A., 1972, *Solar Phys.*, **25**, 127

- [43] Newkirk, G., Altschuler, M. D. and Harvey, J, 1968, In: Klepenheuer, K.O. (ed.), *Structure and Development of Solar Active Regions, IAU Symp.*, **35**, 379.
- [44] Philip, J., 2008, *Astrophys. J.*, **683**, L87.
- [45] Régnier, S. and Amari, T., 2004, *Astron. Astrophys.*, **425**, 345.
- [46] Régnier, S., Amari, T. and Kersalé., 2002, *Astron. Astrophys.*, **392**, 1119.
- [47] Régnier, S., Parnell, C.E. and Haynes, A.L., 2008, *Astron. Astrophys.*, **484**, L47.
- [48] Régnier, S. and Priest, E. R., 2007, *Astron. Astrophys.*, **468**, 701.
- [49] Roumeliotis, G., 1996, *Astrophys. J.*, **473**, 1095
- [50] Sakurai, T., 1981, *Solar Phys.*, **69**, 343.
- [51] Sakurai, T., 1989, *Space Sci Rev.*, **51**, 11.
- [52] Schmidt, H.U., 1964, In:Hess, W.N. (ed.), *NASA Symposium on the Physics of Solar Flares.*, *NASA SP-50*, 107.
- [53] Schrijver, C. J., DeRosa, M. L., Metcalf, T., Barnes, G., Lites, B., Tarbell, T., McTiernan, J., Valori, G., Wiegmann, T., Wheatland, M. S., Amari, T., Aulanier, G., Dm  oulin, P., Fuhrmann, M., Kusano, K., Régnier, S. and Thalmann, J. K. 2008, *Astrophys. J.*, **675**, 1637.
- [54] Schrijver, C.J., De Rosa, M. L., Metcalf, T. R., Liu, Y., McTiernan, J., Régnier, S., Valori, G., Wheatland, M. S. and Wiegmann, T., 2006, *Solar Phys.*, **235**, 161.
- [55] Schrijver, C.J. and Title, A.M., 2003, *Astrophys. J.*, **597**, L165.
- [56] Seehafer, N., 1978, *Solar Phys.*, **58**, 215.
- [57] Semel, M., 1998, 2nd Advances in Solar Physics Euroconf, ASP Conf Series, **155**, 423.

- [58] Song, M.T., Fang, C., Tang, Y.H., Wu, S.T. and Zhang, Y.A., 2006, *Astrophys. J.*, **649**, 1084.
- [59] Song, M.T., Fang, C., Zhang, H.Q., Tang, Y.H., Wu, S.T. and Zhang, Y.A., 2007, *Astrophys. J.*, **666**, 491.
- [60] Song, M.T. and Zhang, Y.A., 2005, *Chin. Astron. Astrophys.*, **29**, 159.
- [61] Song, M.T. and Zhang, Y.A., 2004, *Acta. Astron. Sinica.*, **45**, 4.
- [62] Song, M.T. and Zhang, Y.A., 2006, *Chin. Astron. Astrophys.*, **30**, 316.
- [63] Stenflo, J.O., 1973, *Solar Phys.*, **32**, 41
- [64] Tsuneta, S., Ichimoto, K., Katsukawa, Y., Nagata, S., Otsubo, M. and Shimizu, T., 2008, *Solar Phys.*, **249**, 167.
- [65] Tu, C.Y., Zhou, C., Marsch, E., Xia, L.D., Zhao, L., Wang, J.X. and Wilhelm, K., 2005, *Sice.*, **308**, 519.
- [66] Valori, G., Kliem, B. and Fuhrmann, M., 2007, *Solar Phys.*, **245**, 263.
- [67] Valori, G., Kliem, B. and Keppens, R., 2005, *Astron. Astrophys.*, **433**, 335.
- [68] Wang, H., 1997, *Solar Phys.*, **174**, 265.
- [69] Wang, H., Jing, J., Tan, C., Wiegelmann, T. and Kubo, M., 2008, *Astrophys. J.*, **687**, 658.
- [70] Wang, H., Yan, Y. and Sakurai, T., 2001, *Solar Phys.*, **201**, 323.
- [71] Wang, T., Zhang, H. and Xu, A., 1994, *Solar Phys.*, **155**, 99.
- [72] Wheatland, M.S., Sturrock, P.A. and Roumeliotis, G., 2000, *Astrophys. J.*, **540**, 1150.
- [73] Wiegelmann, T., 2004, *Solar Phys.*, **219**, 87.
- [74] Wiegelmann, T., Inhester, B., Lagg, A. and Solanki, S.K., 2005, *Solar Phys.*, **228**, 67.

- [75] Wiegmann, T., Inhester, B. and Sakurai, T., 2006, *Solar Phys.*, **233**, 215.
- [76] Wijn, A.G.de, Stenflo, J.O., Solanki, S.K. and Tsuneta, S., 2009, *Space Sci. Rev.*, **144**, 275
- [77] Woodard, M. F. and Chae, J. C., 1999, *Solar Phys.*, **184**, 239.
- [78] Wu, S.T., Sun, M.T., Chang, H.M., Hagyard, M.J. and Gary, G.A., 1990, *Astrophys. J.*, **362**, 698.
- [79] Yan, Y., 1995, *Solar Phys.*, **159**, 97.
- [80] Yan, Y. and Li, Z., 2006, *Astrophys. J.*, **638**, 1162.
- [81] Yan, Y. and Sakurai, T., 1997, *Solar Phys.*, **174**, 65.
- [82] Yan, Y. and Sakurai, T., 2000, *Solar Phys.*, **195**, 89.
- [83] Zhang, H.Q., 1996, *Astron. Astrophys. Suppl.*, **119**, 205.
- [84] Zhang, H.Q and Zhang, M., 2000a, *Solar Phys.*, **196**, 269.
- [85] Zhang, M. and Zhang, H.Q., Ai, G.X. and Wang, H.N., 1999, *Solar Phys.*, **190**, 79.
- [86] Zhang, M. and Zhang, H.Q., 2000b, *Solar Phys.*, **194**, 29.
- [87] Zhao, M., Wang, J.X., Jing, C.L. and Zhou, G.P., 2009, *Chin. J. Astron. Astrophys.*, **9**, 933.

发表文章目录

- [1] **Suo Liu**, Hong-Qi Zhang, Jiang-Tao Su and Mu-Tao Song. Study on Two Methods for Nonlinear Force-Free Extrapolation Based on Semi-Analytical Field. Solar Physics (SCI), vol 269, pages 41-57, 2011.
- [2] **Suo Liu**, Hong-Qi Zhang, Jiang-Tao. Comparison of Nonlinear Force-free Field and Potential Field in the Quiet Sun. Solar Physics (SCI), vol 270, pages 89-107, 2011.
- [3] **Suo Liu**, Hong-Qi Zhang, Jiang-Tao. Error Analysis on Calculation of Non-linear Force-free Field, (Preparation).

致 谢

在论文完成之际，要衷心感谢我的导师张洪起研究员。张老师广博的专业知识、严谨的治学态度、因材施教的教育方式、勤奋简朴的生活作风以及无私奉献的精神，都令我受益匪浅。无论在课题的选择、研究和论文的写作上，还是在生活上，张老师都给予我精心的指导、热情的帮助和深切的关怀，使我能够顺利地完成本论文的工作。

衷心感谢我的导师苏江涛副研究员。他锐意进取的科研精神以及宽容、谦逊的品格非常值得我去学习。苏老师在百忙之中对我研究的课题进行详尽的指导，使得我的科研论文顺利发表，在此，对苏老师表示崇高的敬意和深深的谢意。感谢宋慕陶研究员对外推磁场理论及方法的精细讲解；感谢贺晗老师在磁场外推方法应用方面的指导与帮助；感谢毛信杰教授的关于磁流体力学理论的讲解和帮助。

怀柔太阳观测基地是一个团结向上的研究集体。在这里我深深地体会到了坦然接受帮助和热心帮助别人的快乐，也正是在这个集体中，我逐渐体会到了研究太阳物理的乐趣。衷心感谢在我读博士期间怀柔基地的老师：邓元勇研究员、张枚研究员、林刚华研究员、王东光高级工程师、胡柯良高级工程师等。感谢一起工作的同学们：高峪、徐海清、王晓帆、杨尚斌、王栋、王传宇、玄伟佳、李小波、赵明宇、郝娟、杨潇、侯俊峰、赵翠、白先勇、李静等，与你们一起学习、交流和讨论开阔了我的思路。